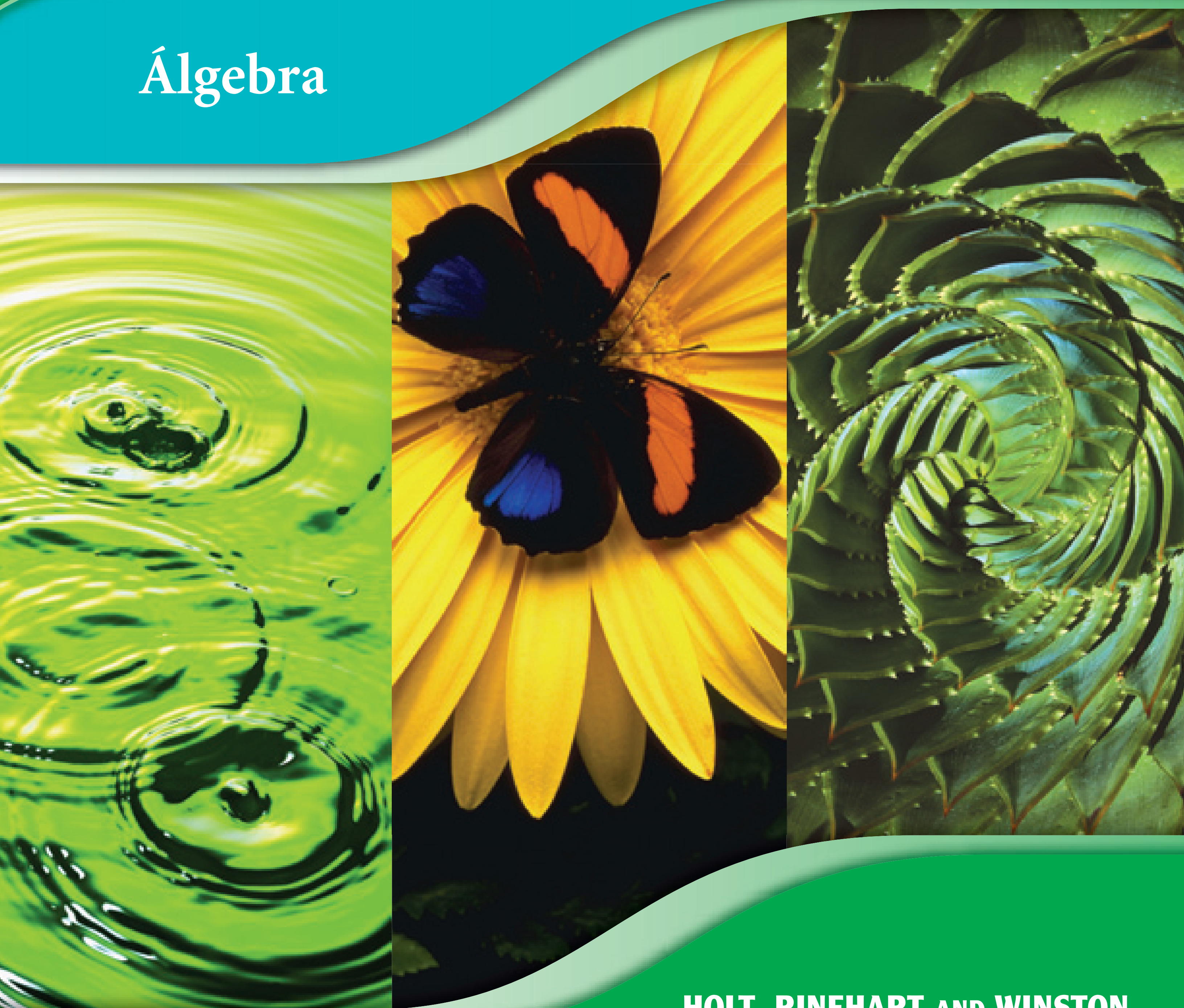
Representar ecuaciones

BRITANNICA
Las matemáticas en contexto

Álgebra



HOLT, RINEHART AND WINSTON

Las matemáticas en contexto es un currículo exhaustivo para los grados intermedios. Se desarrolló entre 1991 y 1997 en colaboración con el Wisconsin Center for Education Research (Centro de Investigación Educativa de Wisconsin), Facultad de Educación, de la Universidad de Wisconsin-Madison y el Freudenthal Institute (Instituto Freudenthal), de la Universidad de Utrecht, Países Bajos, con el apoyo del subsidio n.º 9054928 de la National Science Foundation (Fundación Nacional para las Ciencias).

La revisión curricular se realizó entre los años 2003 y 2005, con el apoyo del subsidio n.º ESI 0137414 de la National Science Foundation.

National Science Foundation

Las opiniones expresadas pertenecen a los autores
y no reflejan necesariamente las de la Fundación.

Kindt, M., Wijers, M., Spence, M. S., Brinker, L. J., Pligge, M. A., Burrill, J. y Burrill, G. (2006). *Representar ecuaciones.* Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Las matemáticas en contexto.* Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

ISBN 0-03-093058-8

1 2 3 4 5 6 073 09 08 07 06

Equipo de desarrollo de *Las matemáticas en contexto*

Desarrollo 1991–1997

Martin Kindt y Monica Wijers desarrollaron la primera versión de *Representar ecuaciones*. La adaptación para su uso en las escuelas estadounidenses es de Mary S. Spence, Lora J. Brinker, Margie A. Pligge y Jack Burrill.

Wisconsin Center for Education

Personal de investigación

Thomas A. Romberg
Director

Joan Daniels Pedro
Asistente del director

Gail Burrill
Coordinadora

Margaret R. Meyer
Coordinadora

Personal del proyecto

Jonathan Brendefur
Laura Brinker
James Browne
Jack Burrill
Rose Byrd
Peter Christiansen
Barbara Clarke
Doug Clarke
Beth R. Cole
Fae Dremock
Mary Ann Fix
Sherian Foster
James A, Middleton
Jasmina Milinkovic
Margaret A. Pligge
Mary C. Shafer
Julia A. Shew
Aaron N. Simon
Marvin Smith
Stephanie Z. Smith
Mary S. Spence

Personal del Freudenthal Institute

Jan de Lange
Director

Els Feijs
Coordinadora

Martin van Reeuwijk
Coordinador

Mieke Abels
Nina Boswinkel
Frans van Galen
Koeno Gravemeijer
Marja van den Heuvel-Panhuizen
Jan Auke de Jong
Vincent Jonker
Ronald Keijzer
Martin Kindt
Jansie Niehaus
Nanda Querelle
Anton Roodhardt
Leen Streefland
Adri Treffers
Monica Wijers
Astrid de Wild

Revision 2003–2005

Monica Wijers y Martin Kindt desarrollaron la versión revisada de *Representar ecuaciones*. La adaptación para su uso en las escuelas estadomnidenses es de Gail Burril.

Wisconsin Center for Education

Personal de investigación

Thomas A. Romberg
Director

David C. Webb
Coordinador

Gail Burrill
Coordinadora editorial

Margaret A. Pligge
Coordinadora editorial

Personal del proyecto

Sarah Ailts
Beth R. Cole
Erin Hazlett
Teri Hedges
Karen Hoiberg
Carrie Johnson
Jean Krusi
Elaine McGrath
Margaret R. Meyer
Anne Park
Bryna Rappaport
Kathleen A. Steele
Ana C. Stephens
Candace Ulmer
Jill Vettrus

Personal del Freudenthal Institute

Jan de Lange
Director

Truus Dekker
Coordinador

Mieke Abels
Coordinadora del contenido

Monica Wijers
Coordinadora del contenido

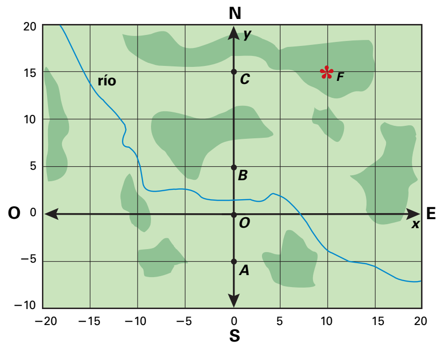
Arthur Bakker
Peter Boon
Els Feijs
Dédé de Haan
Martin Kindt
Nathalie Kuijpers
Huub Nilwik
Sonia Palha
Nanda Querelle
Martin van Reeuwijk

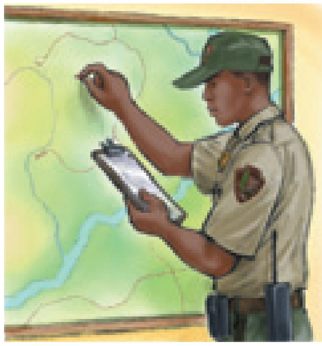
Créditos de las fotografías de la portada: (todas) © Corbis

Ilustraciones
1, 12, Holly Cooper-Olds; **36** Christine McCabe/Encyclopædia Britannica, Inc.; **38, 40** Holly Cooper-Olds

Fotografías
2 © PhotoDisc/Getty Images; **6** © Karen Wattenmaker/NIFC; **11** © Kari Greer; **25** Stephanie Friedman/HRW; **32** Sam Dudgeon/HRW; **41** Departmento de Matemáticas y Ciencias de la Computación de la Universidad Central de Carolina del Norte

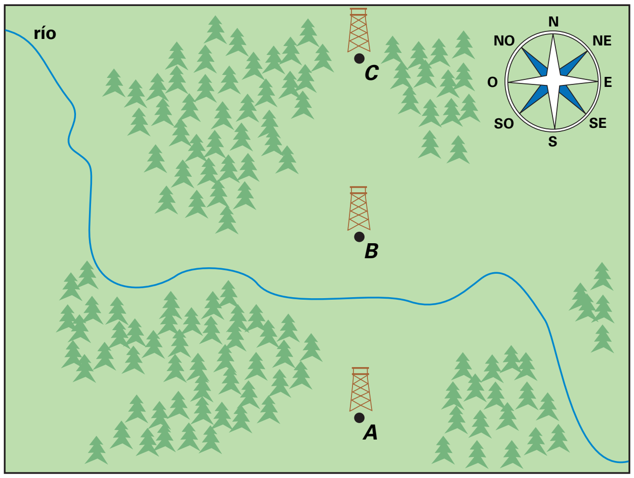
Contenido





Querido alumno:

Representar ecuaciones trata del estudio de las rectas y la resolución de ecuaciones. Al principio, investigarás la manera en que los guardabosques de las torres de observación informan incendios forestales. Aprenderás muchas formas distintas de describir direcciones, rectas y ubicaciones. Mientras estudias la unidad y realizas tus actividades diarias, busca a tu alrededor usos de rectas y coordenadas.



Usarás ecuaciones y desigualdades como una forma compacta de describir rectas y regiones.

Una "rana" te ayudará a resolver ecuaciones saltando en una recta numérica. Aprenderás que algunas ecuaciones pueden resolverse trazando las rectas que representan y averiguando dónde se intersecan.

Esperamos que disfrutes de esta unidad.

Atentamente.

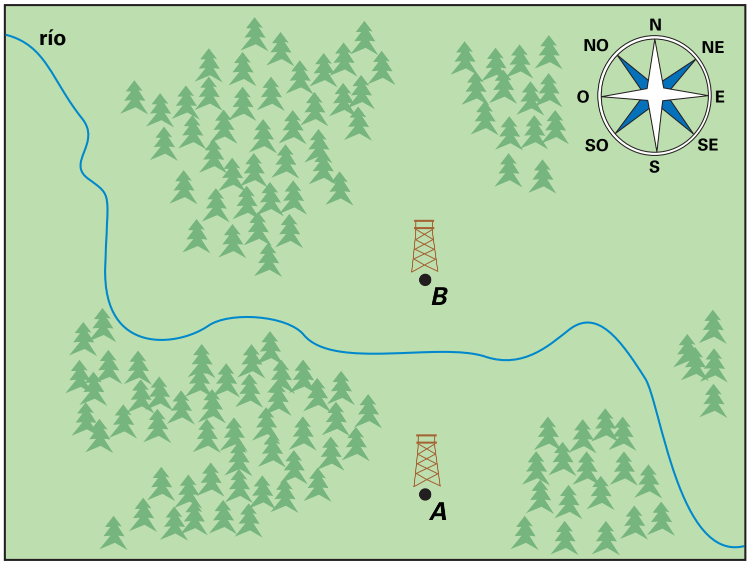
El equipo de desarrollo de Las matemáticas en contexto

Donde hay humo…

¿Dónde es el incendio?

Desde las altas torres de observación de incendios, los guardabosques buscan señales de humo. Para combatir un incendio, los bomberos necesitan saber la ubicación exacta del fuego y si se está propagando. Los guardabosques que vigilan los incendios están en comunicación constante con los bomberos.

El mapa muestra dos torres de incendios en los puntos *A* y *B*. La estrella de ocho puntas que está en el ángulo superior derecho del mapa, llamada **rosa de los vientos**, muestra los ocho puntos cardinales: norte, noreste, este, sureste, sur, suroeste, oeste y noroeste. Entre las dos torres hay 10 kilómetros (km) y como indica la rosa de los vientos, se encuentran en la recta norte-sur.



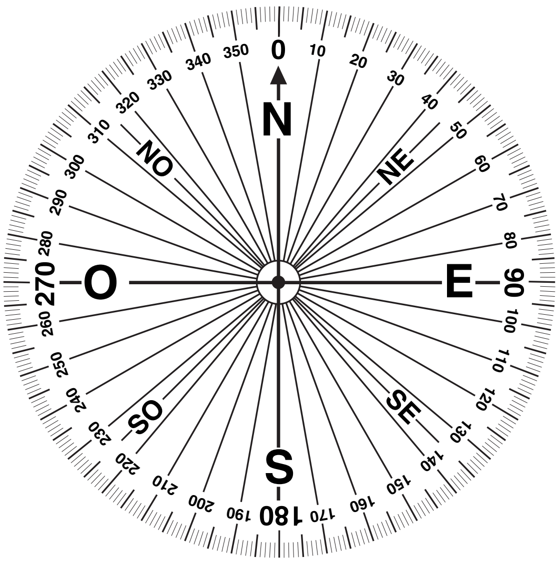
Un día los guardas de las dos torres observan que hay humo en el bosque.

Los guardas de la torre *A* informan que el humo está directamente al noroeste de su torre.

1. ¿Es suficiente esta información para darles a los bomberos la ubicación exacta del incendio? Explica, sí o no, ¿por qué?

Los guardas de la torre *B* informan que el humo está directamente al suroeste de su torre.

2. Usa la **Hoja de actividad del estudiante 1** para indicar la ubicación del incendio.



En los problemas 1 y 2, usaste los ocho rumbos de la rosa de los vientos para describir direcciones. También puedes usar **mediciones en grados**.

Un círculo completo mide 360°. El norte está alineado típicamente con los 0° (o 360°). Observa que si continúas en el sentido de las agujas del reloj, el este coincide con los 90°, el sur con los 180° y el oeste con los 270°.

Las direcciones se miden en grados, en el sentido de las agujas del reloj y se empieza por el norte.

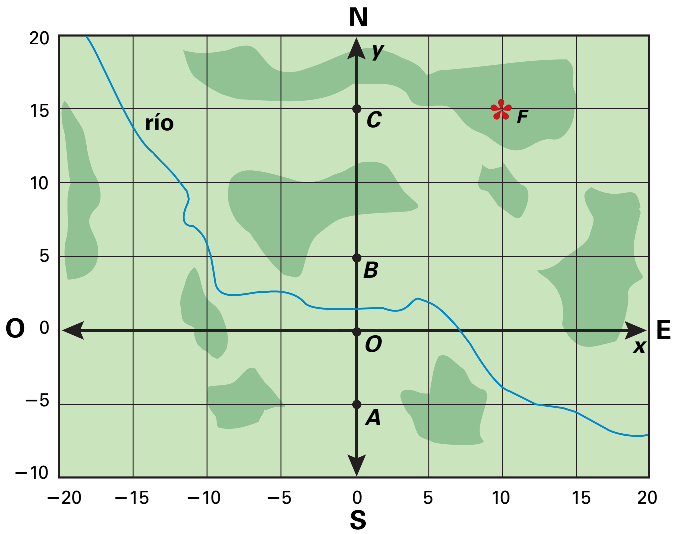
Se informa que hay humo a 8° de la torre *A* y que el mismo humo está a 26° de la torre *B*.

3. Usa la **Hoja de actividad del estudiante 2** para mostrar la ubicación exacta del incendio.

4. Usa la **Hoja de actividad del estudiante 2** para mostrar la ubicación exacta de un incendio si los guardas informan que hay humo a 342° de la torre *A* y a 315° de la torre *B*.

Coordenadas en una pantalla

El supervisor del parque usa un mapa computarizado del parque nacional para registrar y controlar las actividades del lugar. También lo usa para localizar incendios.



La pantalla de computadora de la izquierda muestra un mapa del parque nacional. Las zonas más oscuras representan bosques. Las zonas más claras representan prados y campos sin árboles. Los números representan distancias en kilómetros.

El punto *O* representa la ubicación de la oficina del supervisor del parque; los puntos *A*, *B* y *C* son las torres de los guardas.

5. a. ¿Cuál es la distancia entre las torres *A* y *B*? ¿Entre la torre *C* y el punto *O*?

b. ¿Dónde está ubicado el punto *O* en relación con la posición de las torres *A* y *B*?

Se divisa un incendio a 10 km al este del punto *C*. La ubicación de ese punto (rotulado *F*) está dada por las coordenadas 10 y 15. Las coordenadas de un punto pueden llamarse **coordenada horizontal** y **coordenada vertical**, o **coordenada *x*** y **coordenada *y***, según las variables usadas en la situación.

$$F = (10, 15)$$

coordenada horizontal o coordinada *x*

coordenada vertical o coordinada *y*

Usa el mapa de la página 3 para responder a los problemas 6 y 7.

6. **a.** Halla el punto que está a mitad de camino entre *C* y *F*. ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?

b. Escribe las coordenadas del punto que está a 10 km al oeste de *B*.

Las coordenadas de la torre de incendio *B* son (0, 5).

7. **a.** ¿Cuáles son las coordenadas de las torres que están en *C* y *A*?

b. ¿Cuáles son las coordenadas de la oficina que está en *O*?

El mapa de los guardas es un ejemplo de un **sistema de coordenadas**. El punto *O* se llama **origen** del sistema de coordenadas. Si las coordenadas se expresan como (x, y):

la recta horizontal que pasa por *O* se llama **eje de x**;

la recta vertical que pasa por *O* se llama **eje de y**.

Los dos ejes dividen la pantalla en cuatro partes: una sección noreste (NE), una sección noroeste (NO), una sección suroeste (SO) y una sección sureste (SE). El punto *O* es el vértice de cada sección y estas se llaman **cuadrantes**.

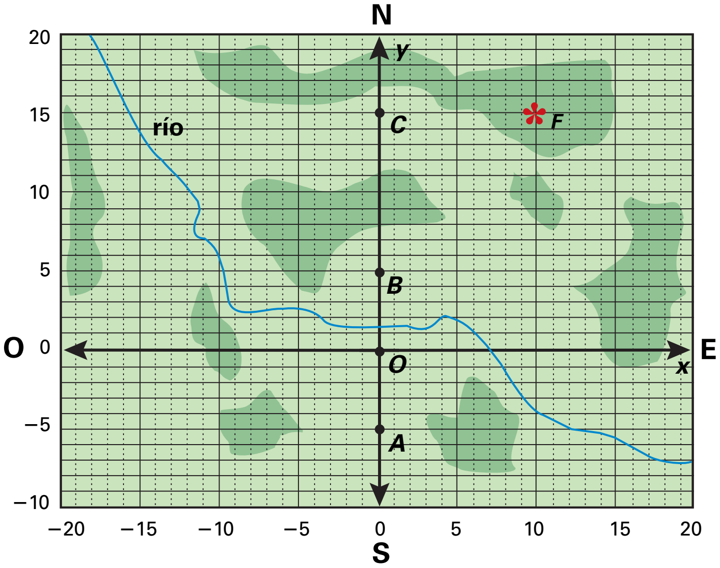
8. Las dos coordenadas de un punto son negativas. ¿En qué cuadrante está el punto?

Usa el mapa de la página 3 para responder a los problemas 9 y 10.

9. Halla el punto (−20, −5) en la pantalla de computadora de la página 3. ¿Qué puedes decir de la posición de este punto en relación con el punto *A*?

Hay un incendio en el punto *F* (10, 15).

10. ¿Qué direcciones, medidas en grados, les deben dar a los bomberos desde las torres *A*, *B* y *C*?



La pantalla de la computadora puede refinarse con rectas horizontales y verticales que representen cuadrículas de distancia de 1 km. El lado de cada cuadrado pequeño representa 1 km.

La pantalla de la izquierda muestra un río que va de NO a SE.

11. **a.** ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos donde el río sale de la pantalla?

b. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde el río cruza el eje de *x*? ¿Y dónde cruza el eje de *y*?

El incendio avanza en la pantalla de norte a sur a lo largo de una recta vertical. El fuego empezó en *F* (10, 15).

12. **a.** ¿Cuáles son sus posiciones después de haber avanzado 1 km hacia el sur? ¿Después de haber avanzado 2 km hacia el sur? ¿Después de 3 km hacia el sur? ¿Después de 10 km más hacia el Sur?

b. Describe qué sucede con la coordenada *x* del incendio que avanza.

Las rectas verticales y horizontales se describen de manera especial. Por ejemplo, una recta vertical que está 10 km al este del origen puede describirse como: $x = 10$.

13. **a.** ¿Por qué $x = 10$ describe una recta vertical que está a 10 km al este del origen?

b. ¿Cómo describirías una recta horizontal que está a 5 km al norte del punto *O*? Explica tu respuesta.

14. **a.** ¿Dónde está en la pantalla la recta descrita por $x = -5$?

b. ¿Dónde está en la pantalla la recta descrita por $y = 15$?

c. Describe el camino de un incendio que avanza sobre la recta $y = 8$.

La descripción $x = 10$ se llama **ecuación de la recta vertical** que está a 10 km al este de *O*. La **ecuación de la recta horizontal** que está a 10 km al norte de *O* es $y = 10$.

Regiones con incendios

Para evitar que se propaguen los incendios forestales, los parques y los bosques generalmente contienen una red de franjas anchas de tierra, llamadas *cortafuegos*, donde sólo hay pastos cortos o tréboles. Los cortafuegos se mantienen mediante el corte o el pastoreo.

En el bosque, algunos cortafuegos siguen parte de las rectas descritas por las ecuaciones $x = 14$, $x = 16$, $x = 18$, $y = 8$, $y = 6$, $y = 4$, $y = 2$ y $y = 0$.

15. **a.** Usando la **Hoja de actividad del estudiante 3**, traza los cortafuegos que atraviesan las regiones boscosas del parque.

b. Escribe las coordenadas de 5 puntos que se encuentran al norte del cortafuegos descrito por $y = 8$.

Los guardabosques describen la región al norte del cortafuegos que está en $y = 8$, con "*y* mayor que 8". Esto puede escribirse como la desigualdad $y > 8$.

16. **a.** Explica cómo $y > 8$ describe toda la región al norte de $y = 8$.

b. ¿Por qué no es necesario escribir una desigualdad de *x* para describir la región al norte de $y = 8$?

c. Describe la región al oeste del cortafuegos que está en $x = 14$ usando una desigualdad.

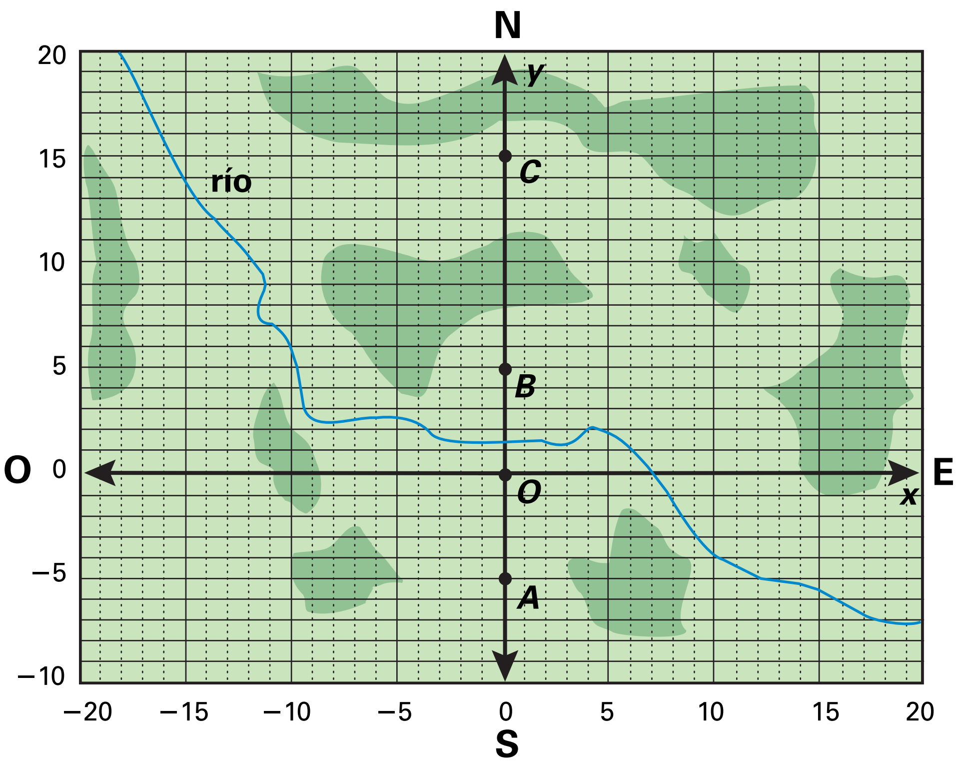
El incendio está limitado por los cuatro cortafuegos que lo rodean. Si el incendio empieza en el punto (17, 5), el cortafuegos vertical que está en $x = 16$ y el que está en $x = 18$, y el cortafuegos horizontal que está en $y = 4$ y el que está en $y = 6$ evitarán que se propague. Esta es una manera de describir la región:

x está entre 16 y 18; *y* está entre 4 y 6.

Puedes usar desigualdades para describir la región:

$16 < x < 18$; y $4 < y < 6$.

Esto también puede leerse "*x* es mayor que 16 y menor que 18, y *y* es mayor que 4 y menor que 6".



Usa la **Hoja de actividad del estudiante 3** para resolver los problemas del 17 al 19.

17. Muestra la región limitada para un incendio que empieza en el punto (17, 5).

18. Otro incendio empieza en el punto (15, 3). El incendio está confinado a una región por cuatro cortafuegos. Muestra la región y usa desigualdades para describirla.

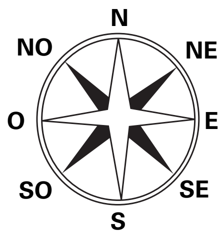
19. Usa un lápiz de otro color para mostrar la región descrita por las desigualdades $-6 < x < -3$ y $6 < y < 10$.

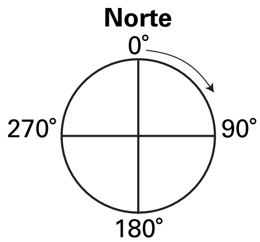
A Donde hay humo…

Resumen

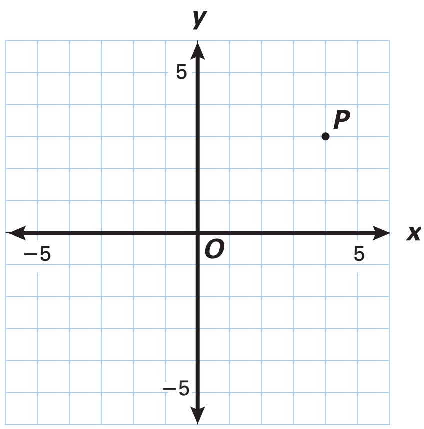
Has visto dos maneras de indicar una dirección partiendo de un punto en un mapa.

- Usando una rosa de los vientos, puedes indicar uno de los ocho puntos cardinales: N, NE, E, SE, S, SO, O y NO.
- Puedes indicar direcciones usando mediciones en grados, empezando desde 0° en el norte y midiendo en el sentido de las agujas del reloj hasta 360°.





Otra manera de describir ubicaciones en un mapa es usando una cuadrícula o sistema de coordenadas. En un sistema de coordenadas, el eje horizontal se llama *eje de x*, y el eje vertical se llama *eje de y*. Los ejes se intersecan en el punto (0, 0), llamado *origen*.



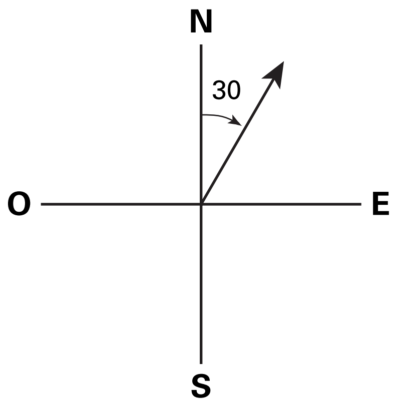
La ubicación de un punto está dada por las coordenadas x e y, que se escriben (x, y).

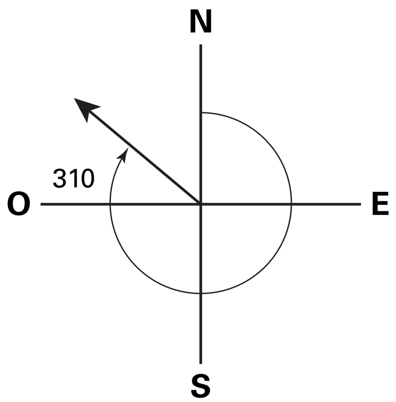
Cuando los puntos están en una recta vertical, la *coordenada x* no cambia. Las rectas verticales pueden describirse por ecuaciones, como $x = 1$, $x = 8$ y $x = -3$.

Cuando los puntos están en una recta horizontal, la coordenada y no cambia. Las rectas horizontales pueden describirse por ecuaciones, como $y = -5$, $y = 0$ y $y = 3$.

Para describir una región pueden usarse desigualdades. Por ejemplo, $1 < x < 3$ y $-2 < y < 3$ describen una región rectangular de 2 por 5.

Verifica tu trabajo





1. a. En el diagrama que está arriba se muestra a la izquierda la dirección 30°. ¿Qué dirección está opuesta a 30°?

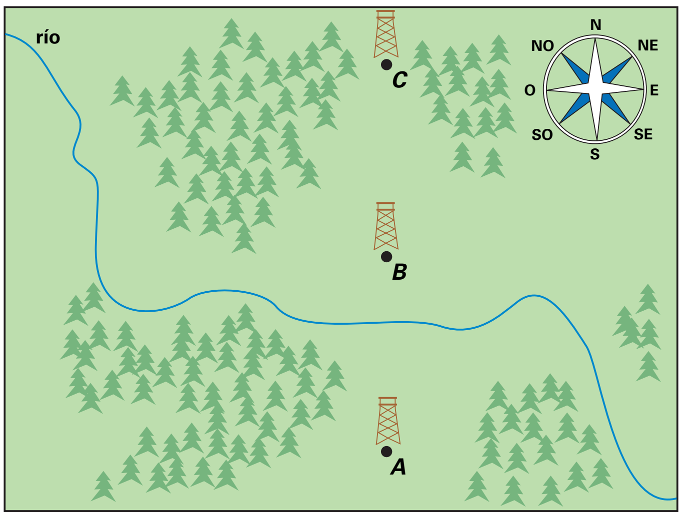
   b. ¿Qué dirección se muestra arriba, a la derecha? ¿Qué medición en grados es la opuesta a esa dirección?

Un incendio empieza en el punto *F* (10, 15). Un fuerte viento del NE propaga el incendio hasta el punto *G*, que está a 5 km al oeste y 5 km al sur de *F*.

Nota: puedes usar el mapa de la página 5 para ver la situación.

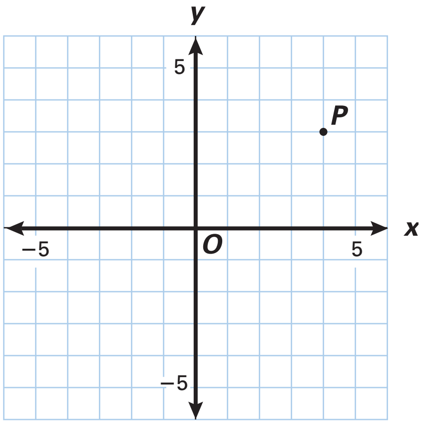
2. a. ¿Cuáles son las coordenadas de *G*?

   b. ¿Qué direcciones en grados les dará a los bomberos la torre *A*, que está en (0, −5) y la *C*, que está en (0, 15)?



3. Un día, los guardas informan que hay humo en una dirección a 240° de la torre *A* y a 240° de la torre *B*. ¿Es posible que ambos informes sean correctos? Sí o no, ¿por qué?

A Donde hay humo…



4. a. Supón que el punto *P* del sistema de coordenadas de la izquierda se traslada en línea recta y en dirección horizontal. ¿Cuál es una ecuación para esa recta?

b. Usa una desigualdad para describir la región que está debajo de la recta.

5. En el sistema de coordenadas anterior, el punto *O* es el centro de una región rectangular, donde *P* es un vértice. Los límites de la región son rectas horizontales y verticales. Usa desigualdades para describir la región.

Para reflexionar más

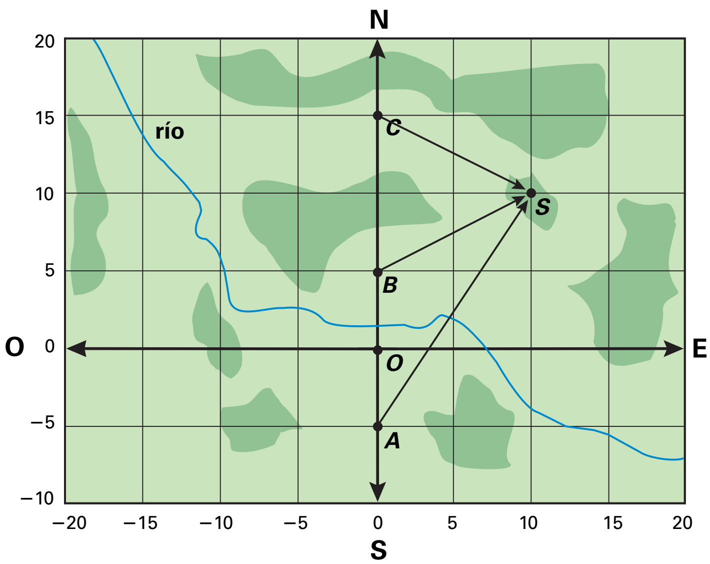
Compara dos maneras de indicar una dirección partiendo de un punto en un mapa. Da una ventaja de cada una.

B Direcciones en forma de pares de números

Indicar el camino a los bomberos

En la sección anterior, las direcciones desde un punto se indicaron mediante referencias de la rosa de los vientos, como N o NO. Una segunda manera de indicar direcciones es empleando grados medidos en el sentido de las agujas del reloj desde el norte, como 30° o 210°. Esta sección presenta un tercer método para indicar direcciones.

Se informa que hay humo en el punto *S* (10, 10). Una brigada de bomberos está en la torre *B*, de modo que necesita ir 10 km al este y 5 km al norte. Esas instrucciones deben expresarse como el par de dirección [+10, +5]. El primer número da la componente horizontal de la dirección y el segundo número da la vertical.



B Direcciones en forma de pares de números

Nota que los pares de dirección van entre corchetes como este: [,]. Las dos coordenadas de un punto van entre paréntesis como este: (,).

1. **a.** Escribe el par de dirección que describa la dirección del incendio en el punto *S* como se ve desde el punto *A*.

b. Haz lo mismo para describir el punto *S* visto desde el punto *C*.

2. Usando la mitad superior de la **Hoja de actividad del estudiante 4**, ubica y rotula el punto *G* en (20, 15). Luego usa pares de dirección para describir la ubicación de *G* visto desde los puntos *A*, *B* y *C*.

Observa que para los guardas de la torre *B*, la dirección al punto *S* es la misma que la dirección al punto *G*. De modo que podemos decir que los pares de dirección [+10, +5] y [+20, +10] indican la misma dirección desde el punto *B*.

3. **a.** ¿Por qué son iguales?

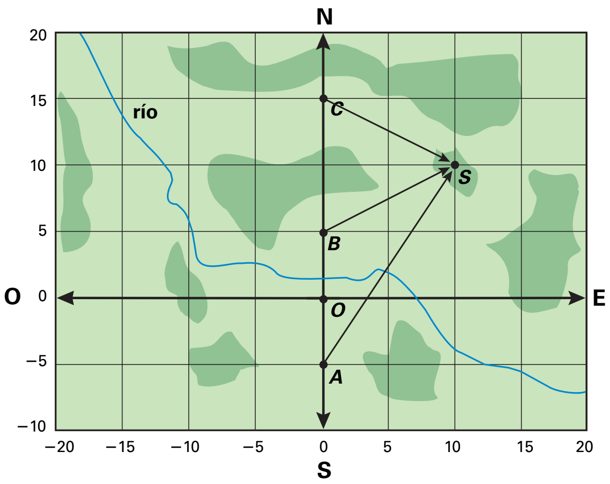
b. Escribe otros tres pares de dirección que indiquen esta misma dirección desde el punto *B*.

4. Halla tres puntos distintos en el mapa que estén en la misma dirección que el punto *S*, desde la torre *A*. Escribe las coordenadas de estos puntos.

5. **a.** Da dos pares de dirección que indiquen la dirección NO.

b. Da dos pares de dirección que indiquen la dirección SE.

6. ¿Qué dirección de la rosa de los vientos se indica con [+1, 0]? ¿Qué dirección de la rosa de los vientos se indica con [0, −1]?



Usa la gráfica de la mitad superior de la **Hoja de actividad del estudiante 4** para resolver los problemas del 7 al 9.

7. Localiza el incendio basándote en los siguientes informes.

- Los guardas de la torre *B* observan humo en la dirección [−9, +2].
- Los guardas de la torre *C* observan humo en la dirección [−3, −1].

8. Los pares de dirección [−6, +9] y [−8, +12], ¿indican la misma dirección? Usa un dibujo como parte de tu respuesta.

9. a. Ubica y rotula cuatro puntos que estén en la dirección [+1, +1.5] desde el punto *A*.

b. ¿Cuál es una forma rápida de marcar todos los puntos que están en la dirección [+1, +1.5] desde *A*?

10. Explica por qué cada uno de los siguientes grupos de dos pares de dirección indica la misma dirección o direcciones diferentes.

a. [+1, +3] y [+4, +12]

b. [−4, +3] y [+8, −6]

c. [+5, +8] y [+6, +9]

Para indicar una dirección determinada, puedes usar muchos pares de dirección.

11. a. Da cinco pares de dirección que indiquen la dirección [+12, +15].

b. ¿Qué tienen en común todas tus respuestas de la parte **a**?

c. ¿Puede cualquiera de los pares de dirección que anotaste tener componentes que sean fracciones? Sí o no, ¿por qué?

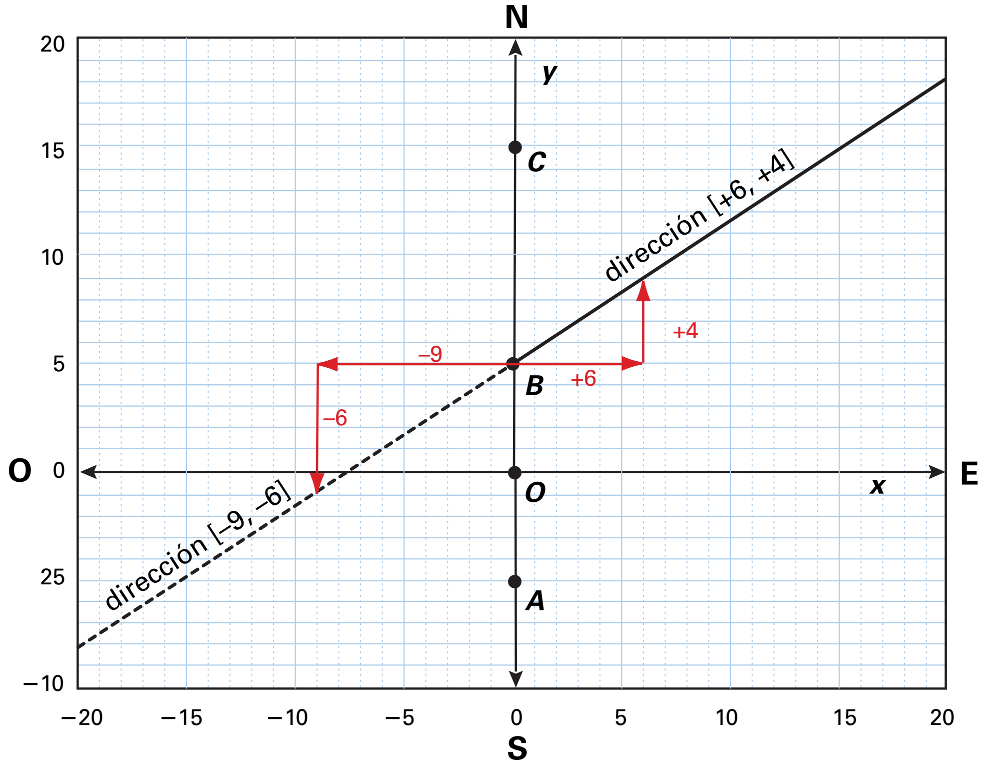
12. Usa el mapa de la parte inferior de la **Hoja de actividad del estudiante 4**.

a. Rotula el punto *A* (0, −5) en el mapa.

b. Muestra todos los puntos en el mapa que estén en la dirección [–1, +2] desde *A.*

c. Muestra todos los puntos en el mapa que estén en la dirección [+1, −2] desde *A.*

d. ¿Qué adviertes en las respuestas de la parte **b** y **c**?



Los dos pares de números [16, 14] y [–9, –6] representan direcciones opuestas. En el diagrama, están trazados todos los puntos desde *B* en las direcciones [16, 14] y [–9, –6]. El resultado es una recta.

13. a. Da otros tres pares de dirección para la parte de la recta que pasa por *B* y que no es punteada.

b. Da otros tres pares de dirección para la parte punteada de la recta que pasa por *B*.

c. ¿Qué tienen en común los seis pares de dirección?

14. Supón que quieres trazar la recta que tiene el par de dirección [75, 25] y que empieza en (0, 10). Describe cómo podrías hacerlo.

De arriba abajo por la pendiente

Todos los pares de números para una misma dirección y los de la dirección opuesta tienen algo en común: la misma razón.

Puedes calcular dos razones distintas para un par de números:

la componente horizontal dividida por la componente vertical;

o

la componente vertical dividida por la componente horizontal.

Los matemáticos usan, frecuentemente, esta razón: $\dfrac{\textbf{componente vertical}}{\textbf{componente horizontal}}$

y llaman a esta razón **pendiente** de una recta. $\textbf{pendiente} = \dfrac{\textbf{componente vertical}}{\textbf{componente horizontal}}$

15. a. Halla la pendiente de la recta que trazaste en el problema 12, usando la dirección [−1, +2] dada en 12b.

b. Haz lo mismo que en la parte **a**, pero ahora usa la dirección [+1, −2] del punto 12c.

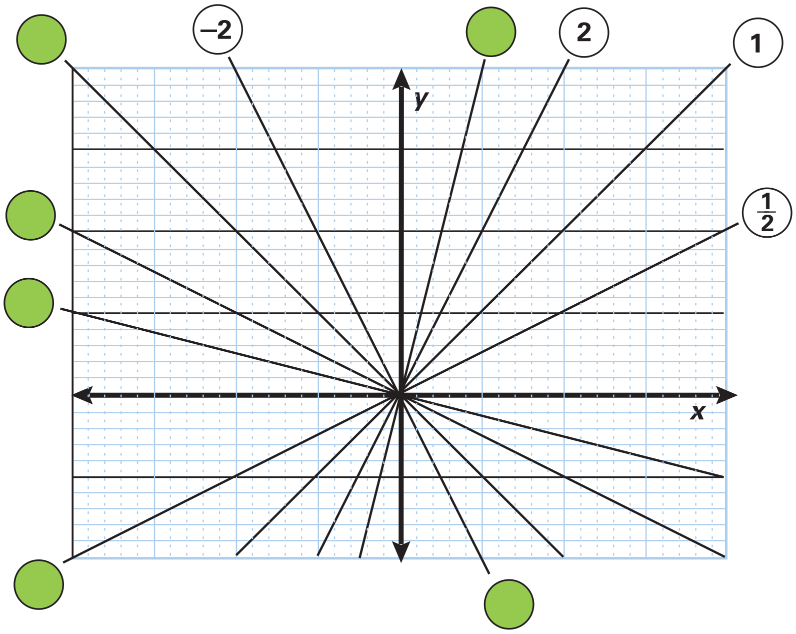
c. **Reflexiona** ¿Qué adviertes si comparas tus respuestas a los problemas 15a y 15b?

Del problema 13, puedes sacar la conclusión de que $\frac{4}{6} = \frac{-6}{-9}$.

16. a. Explica cómo puedes llegar a esta conclusión usando el problema 13.

b. Usando pares de dirección, explica que $\frac{-4}{2} = -2$.

B Direcciones en forma de pares de números



Usa la **Hoja de actividad del estudiante 5** para resolver los problemas del 17 al 19.

Cada recta trazada en la **cuadrícula de coordenadas** contiene el punto (0, 0). En algunas de las rectas, aparece el rótulo de la pendiente dentro de su correspondiente círculo.

17. a Completa los círculos vacíos con la pendiente correcta.

b. ¿Cuál es la pendiente para una recta que pasa por los puntos (1, 1) y (15, 3)? ¿Cómo lo averiguaste?

18. a. ¿Qué sabes acerca de dos rectas que tienen la misma pendiente?

b. Explica que $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{-3}{-1}$ y $\frac{15}{5}$ indican la misma pendiente. ¿Cuál es la manera más simple de escribir esta pendiente?

19. Traza y rotula la recta que pasa por (0, 0), cuya pendiente es:

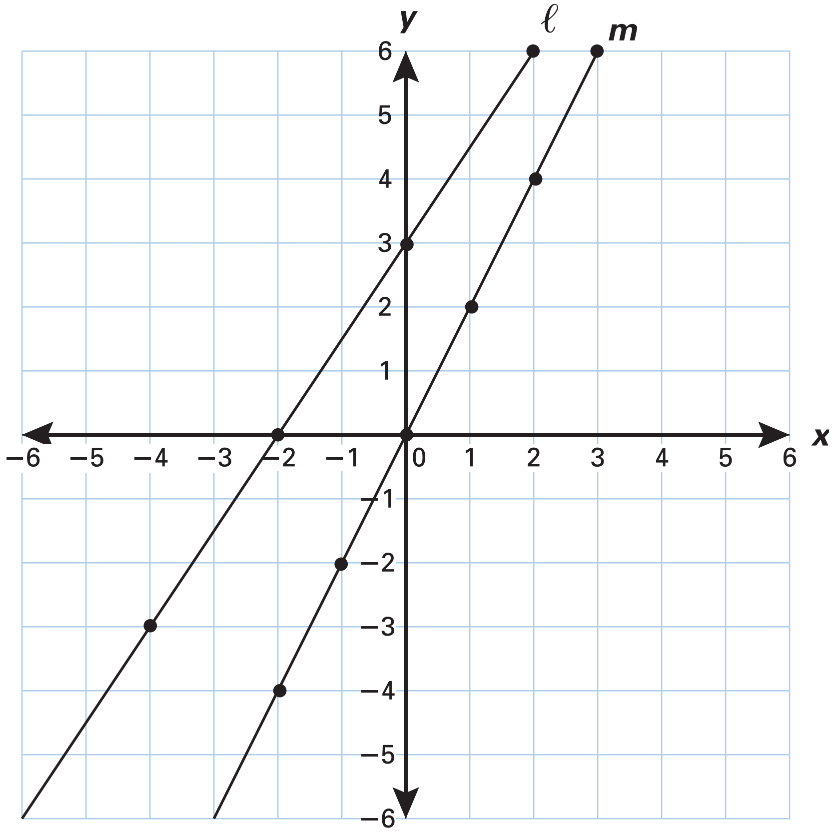
a. $\frac{4}{3}$

b. $-\frac{1}{2}$

Las dos rectas de la siguiente gráfica no son paralelas.

20. a. Halla la pendiente de cada recta.

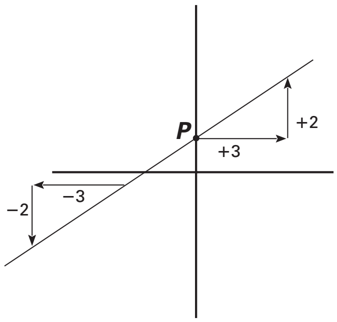
b. Esta cuadrícula es demasiado pequeña para mostrar el punto donde se cruzan las dos rectas. Halla las coordenadas de este punto y explica el método que usas para hallarlas.



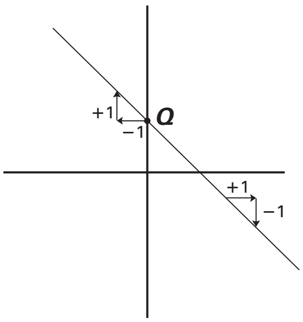
B Direcciones en forma de pares de números

Resumen

Puedes indicar la dirección desde un punto, usando un par de dirección, como [+3, +2] o [+1, −1]. El primer número es la componente horizontal y el segundo número es la componente vertical.



Desde *P*, los puntos en las direcciones [+3, +2] y [−3, −2] están en la misma recta. La pendiente de esta recta es $\frac{2}{3}$.



Desde *Q*, los puntos en las direcciones [+1, −1] y [−1, +1] están en la misma recta. La pendiente de esta recta es $\frac{+1}{-1} = -1$.

Se usan corchetes para distinguir los pares de dirección de los pares de coordenadas.

[+2, −4] es un par de dirección.

(2, −4) son las coordenadas de un punto.

Todos los pares de dirección en la misma dirección y en la dirección opuesta tienen la misma razón.

La pendiente de una recta está dada por esta razón:

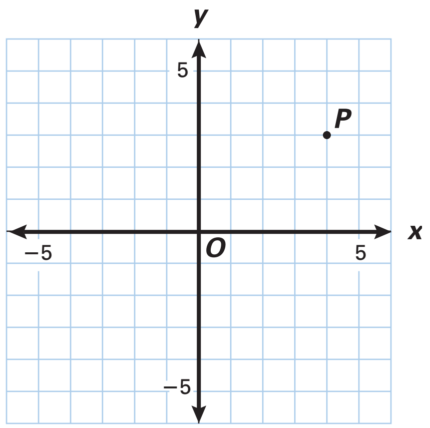
$$\textbf{pendiente} = \frac{\textbf{componente vertical}}{\textbf{componente horizontal}}$$

Si quieres trazar una recta usando una pendiente dada, puedes hallar primero un par de dirección que corresponda a la pendiente dada.

Verifica tu trabajo

1. **a.** Da las coordenadas del punto *P* en este sistema de coordenadas.

   b. Da dos pares de dirección que describan la dirección desde el punto *O* hasta el punto *P* del sistema de coordenadas.



   c. Copia el dibujo en tu cuaderno. Ubica y rotula tres puntos que estén en la dirección [−4, −2] desde el punto *P*.

   d. ¿Cuál es una manera rápida de marcar todos los puntos de la dirección [−4, −2] desde el punto *P*?

2. Para cada dos pares de dirección descritos enseguida, di si indican la misma dirección o direcciones distintas y explica por qué.

   a. [+4, +3] y [+8, −6]

   b. [+5, +8] y [+1, +1.6]

   c. [+13, 0] y [+25, 0]

   d. [+0.5, +2] y [+2, +8]

3. **a.** En tu cuaderno, traza un sistema de coordenadas como el del problema 1 y marca en la cuadrícula el punto *P* del problema 1. Marca el punto *Q* de coordenadas (1, 1).

   b. ¿Qué par de dirección describe la dirección desde *P* hasta *Q*?

   c. Traza la recta que pasa por *P* y *Q*, y halla su pendiente.

4. En el sistema de coordenadas que trazaste para el problema 3, traza y rotula la recta *m* que pasa por *O* (0, 0), que tiene una pendiente de 2.

5. **a.** ¿Cuántas rectas contienen los puntos (1, 2) y (26, 52)? Explica tu razonamiento.

   b. Halla la pendiente de la(s) recta(s) de la parte **a.** ¿Cómo la hallaste?

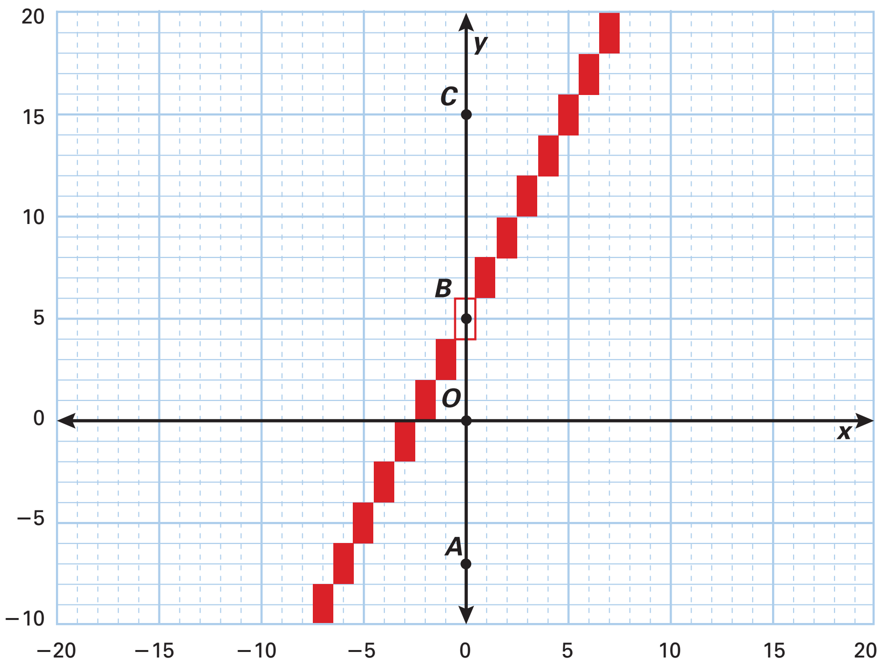
Para reflexionar más

¿Cómo pueden usarse los triángulos semejantes para hallar la pendiente de una recta?

C La ecuación de una recta

Direcciones y pasos

En el siguiente sistema de coordenadas, hay una recta trazada en la dirección [+1, +2] desde *B*.



Puedes trasladarte por esta recta paso a paso. Cada paso es un movimiento de +1 unidad en sentido horizontal y +2 unidades en sentido vertical.

(0, 5)
+1 ⇓ ⇓ +2
(1, 7)
+1 ⇓ ⇓ +2
(2, 9) etc.

1. a. La descripción muestra dos pasos a lo largo de la recta. ¿Dónde estás después de 10 pasos?

b. ¿Dónde estás después de 25 pasos? ¿Y después de 1,000 pasos?

Esta descripción muestra los pasos a lo largo de la misma recta, pero en dirección opuesta.

(0, 5)
−1 ⇓ ⇓ −2
(−1, 3)
−1 ⇓ ⇓ −2
(−2, 1) etc.

2. a. ¿Dónde estás después de 10 pasos?

b. ¿Y después de 100 pasos?

La ecuación de una recta

Una computadora o una calculadora de gráficas puede calcular y trazar con rapidez todos los puntos de una recta. Supón que una computadora, cuando traza los puntos de esta recta, da pasos horizontales de +0.1 y −0.1.

3. a. ¿Cuáles son las correspondientes distancias verticales de cada paso que da la computadora?

b. Si partes de (0, 5), ¿dónde estarás después de 8 pasos cuando la distancia horizontal es +0.1?

c. Si partes de (0, 5), ¿dónde estarás después de 3 pasos cuando la distancia horizontal es −0.1?

Esta es una regla que quizás ya hayas descubierto.

Punto de partida: (0, 5).
Después de 100 pasos horizontales de +1:
$x = 100$
$y = 5 + 100 \times 2 = 205$

4. a. Explica qué representa cada número de $y = 5 + 100 \times 2 = 205$.

b. Escribe una regla similar para 75 pasos horizontales de +1.

c. Escribe una regla similar para 175 pasos horizontales de +1.

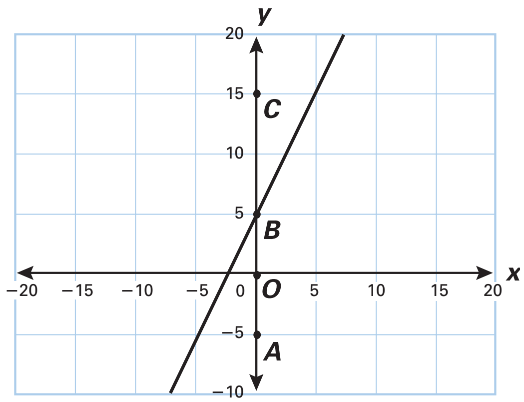
d. Escribe una regla similar para $3\frac{1}{2}$ pasos horizontales de +1.

A partir de las reglas que escribiste en el problema 4, puedes hallar una fórmula que relacione las coordenadas x y las coordenadas y:

$y = 5 + x \cdot 2$ o $y = 5 + 2x$

5. a. Explica la fórmula.

b. ¿Sirve la fórmula para valores negativos de x?



La fórmula $y = 5 + 2x$ se llama **ecuación de una recta**. Si trazas una gráfica para esta ecuación, verás una recta como esta.

En la ecuación $y = 5 + 2x$, dos números tienen funciones especiales.

6. a. ¿Cuál es la importancia del “5” para la gráfica?

b. ¿Cuál es la importancia del “2” para la gráfica?

En la ecuación $y = 5 + 2x$, el 5 y el 2 tienen nombres especiales. El 2 se llama *pendiente* y el 5 se llama *intercepto y*.

7. ¿Por qué crees que se llama intercepto y?

8. Usando la gráfica de la página 22, escribe la ecuación de una recta que pasa por el punto C y tiene una pendiente de 2.

9. Haz una copia de la gráfica que aparece en la página 22 en papel cuadriculado.

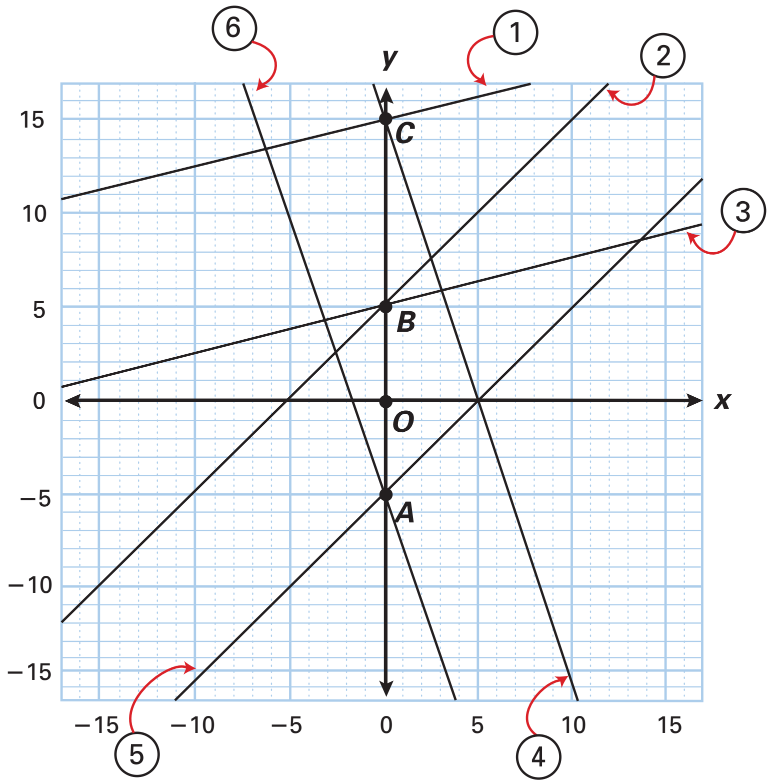
a. Muestra la recta que pasa por B con pendiente $\frac{1}{2}$. Luego rotula la recta con su ecuación.

b. Muestra la recta que pasa por C con pendiente $\frac{3}{6}$ y rotula la recta con su ecuación.

c. ¿Qué adviertes en relación con las dos rectas? Justifica tu respuesta.

Estas dos ecuaciones representan la misma recta:

$$y = 5 + (-2) \cdot x \qquad \text{y} \qquad y = 5 - 2x$$



10. Explica por qué las ecuaciones representan la recta que pasa por B con pendiente −2.

11. a. Escribe una ecuación para la recta que contiene a B y forma un ángulo de 45° con dirección este.

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que contiene a O en lugar de B?

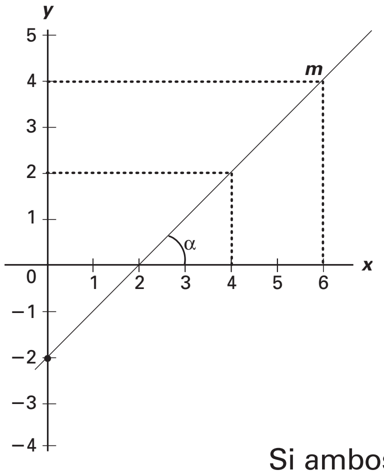
12. a. En tu cuaderno, escribe la ecuación para cada una de las seis rectas de la cuadrícula de la izquierda.

b. ¿Qué rectas son paralelas? Explica tus respuestas.

c. Para todas las ecuaciones, halla el valor de y para $x = 0$. ¿Qué adviertes?

¿Cuál es el ángulo?

En el siguiente sistema de coordenadas, se ha trazado la recta *m*.



13. **a.** ¿Cuál es la pendiente de la recta *m*? ¿Cuál es su intercepto *y*?

b. Escribe una ecuación para la recta *m*.

c. Mide el ángulo α (letra griega alfa).

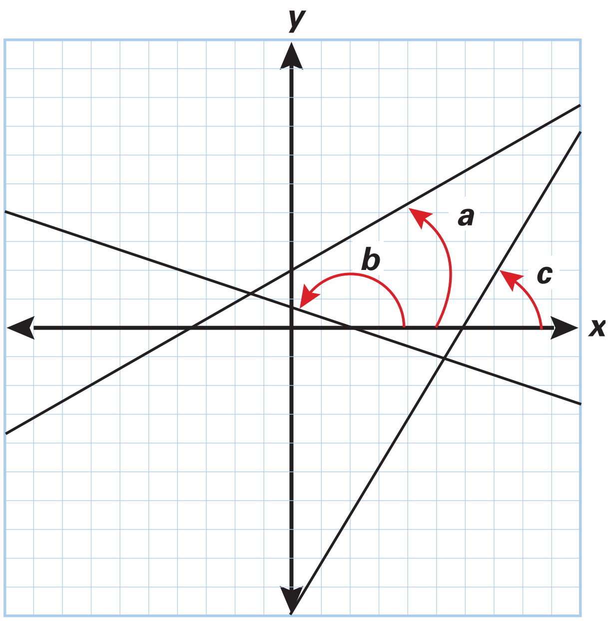
14. **a.** En papel cuadriculado, traza dos rectas en un sistema de coordenadas como este; una que forme un ángulo de 30° con el eje de *x*, y otra que forme un ángulo de 60° con el eje de *x*.

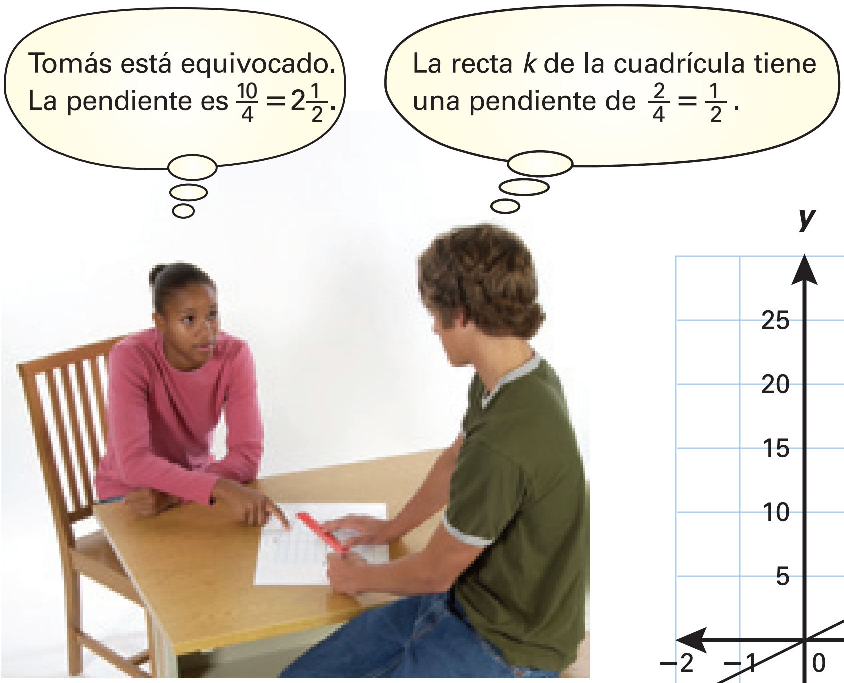
b. Estima la pendiente de cada recta.

Si ambos ejes están a la misma escala, a cada pendiente le corresponde un ángulo. La pendiente es, entonces, igual a la **razón tangente** de ese ángulo y se abrevia *tan*.

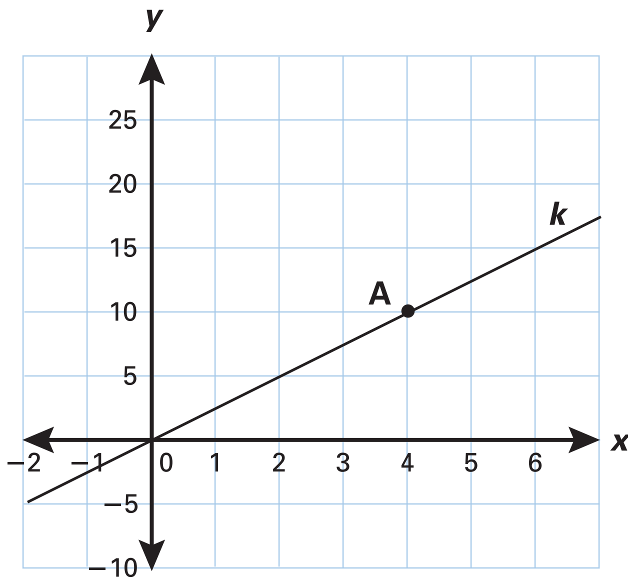
$$\textbf{pendiente} = \textbf{\textit{tan}}\,\alpha = \frac{\textbf{componente vertical}}{\textbf{componente horizontal}}$$

15. Halla la pendiente y la medida del ángulo de cada recta de la siguiente cuadrícula. Nota: los ejes están a la misma escala.





Los dos ejes de la cuadrícula no siempre tienen la misma escala. Si las escalas son diferentes, no puedes usar la *tan* del ángulo como pendiente.



16. a. ¿Estás de acuerdo con Tomás o con Brenda? Explica tu respuesta.

b. En tu cuaderno, copia la cuadrícula anterior y traza una recta que pasa por (0, 20) con pendiente −1.

c. Escribe la ecuación de la recta que trazaste en la parte **b**.

17. a. Mide el ángulo que forma la recta k con el eje de x.

b. Traza una cuadrícula con la misma escala en ambos ejes y una recta k que pase por O (0, 0) y A (4, 10).

c. En la cuadrícula que trazaste para la parte **b**, mide el ángulo que forma la recta k con el eje positivo de x.

d. ¿Cuál de los dos ángulos que mediste para la recta k, el de la parte **a** o el de la parte **c**, corresponde a la pendiente? Da razones para tu respuesta.

18. a. ¿Qué puedes decir sobre una recta y su pendiente si el ángulo es 0°?

b. ¿Puede el ángulo que forma una recta con el eje positivo de x ser mayor que 90°? Explica tu razonamiento.

19. Si una recta pasa por (2, 3) y tiene pendiente 4, ¿cómo podrías hallar el intercepto y?

C La ecuación de una recta

Resumen

Todas las líneas rectas pueden ser determinadas por un punto y una dirección. La dirección se llama *pendiente*. Una ecuación para la recta que contiene el punto (0, 5) y tiene pendiente 3 es $y = 5 + 3x$.

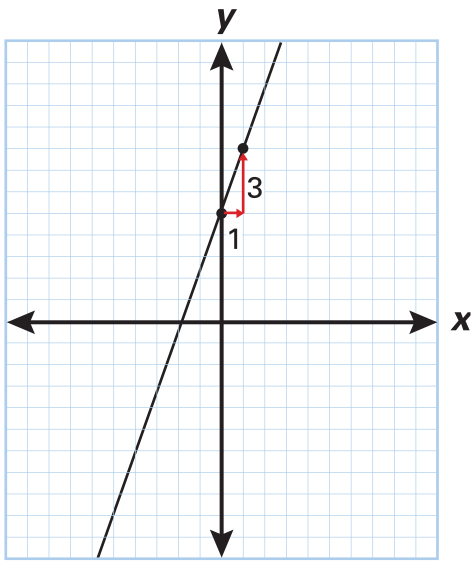
El número 5 indica el **intercepto** en el eje de y, que es un punto muy especial.

El número 3 es el valor de la pendiente.

La ecuación de una recta que no es vertical se expresa así:

y = intercepto + pendiente • x

Si tienes la ecuación de una recta, puedes hallar el intercepto y calculando el valor de y para $x = 0$. El intercepto y de una recta puede ser positivo, cero o negativo. La pendiente de una recta puede ser positiva, cero o negativa.



Otra manera de describir la pendiente es usando la *tan* del ángulo que forma la recta con el eje de x. Cuando los dos ejes de la cuadrícula no están representados a la misma escala, tienes que ser cuidadoso con la pendiente y las *tan*.

Verifica tu trabajo

1. **a.** ¿Cuál es el intercepto y de la recta cuya ecuación es $y = -3 + 2x$? ¿Cuál es su pendiente?

   b. ¿Escribe la ecuación para una recta que pasa por (0, 0) y tiene la misma pendiente que la ecuación de la parte **a.**

2. **a.** Escribe una ecuación para la recta que pasa por C (0, 15) con pendiente $-\frac{1}{4}$.

   b. Escribe una ecuación para la recta que pasa por A (0, −5) con pendiente −1.

3. Traza un sistema de coordenadas en tu cuaderno. En este sistema de coordenadas, traza las rectas definidas en el problema 2.

4. **a.** Escribe una ecuación de una recta con un intercepto y positivo y una pendiente negativa. Traza esta recta en un sistema de coordenadas.

   b. ¿Qué puedes decir sobre una recta con un intercepto y igual a 0?

   c. ¿Qué puedes decir sobre una recta cuya pendiente es igual a 0?

Para reflexionar más

Describe con tus propias palabras lo que significa la palabra *pendiente*. En tu descripción, también explica por qué es importante ser cuidadoso cuando hallamos la pendiente si la escala del eje de x es diferente de la del eje de y. Puedes usar un ejemplo o más.

D

Resolución de ecuaciones

Saltos precipitados

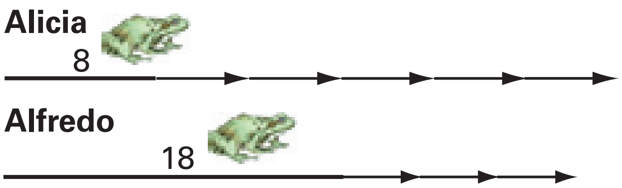
Las actividades de las secciones anteriores incluían coordenadas y direcciones. Las actividades llevaron a la investigación de la pendiente y la ecuación de una recta. Esta sección da una mirada a la escritura y la resolución de ecuaciones.

Dos ranas, Alicia y Alfredo, están en un bosque, cerca de un sendero. De pronto, oyen pasos en el sendero. Para evitar posibles peligros, se alejan del sendero.

Alicia queda a 8 decímetros (dm) del sendero y Alfredo queda a 18 dm del sendero. (Nota: 10 decímetros = 1 metro.) Cada rana da varios saltos y después se detiene.

1. ¿Qué información necesitarías para hallar la distancia a la que están ahora las ranas del sendero?

Supón que Alicia y Alfredo se trasladan la misma distancia con cada salto, pero Alicia da 5 saltos y Alfredo da 3 saltos. El siguiente diagrama ilustra sus posiciones nuevas.



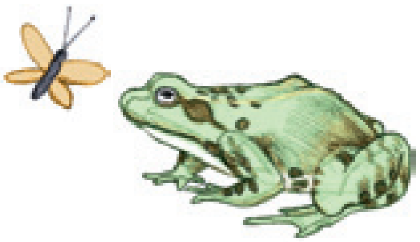
Supón que Alicia y Alfredo se trasladan 4 dm con cada salto.

2. a. Halla la distancia desde el sendero hasta la posición nueva de cada rana. Traza un diagrama que muestre esta situación.

b. Supón que sabes que cada salto mide entre 2 dm y 6 dm. ¿Qué conclusión puedes sacar acerca del lugar adonde llega cada rana?

Supón que las ranas dejan de saltar exactamente a la misma distancia del sendero y que tú quieres saber la distancia de cada salto y a qué distancia final queda cada rana del sendero.

3. Escribe tu razonamiento sobre este problema. Comparte el método de tu grupo con otros compañeros de tu clase.

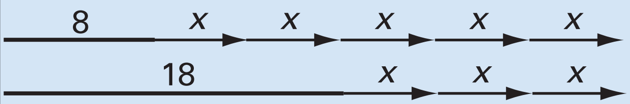


D Resolución de ecuaciones

Una manera de responder al problema 3 es rotular el valor faltante o **incógnita**. En este problema, la incógnita es la longitud de cada salto. Puedes usar el símbolo x para la longitud del salto. La siguiente casilla da un diagrama y una ecuación para responder al problema 3.

Casilla A

4. Explica cómo la ecuación $8 + 5x = 18 + 3x$ describe el diagrama de la casilla A.

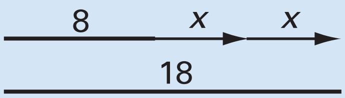


$$8 + 5x = 18 + 3x$$

Analiza los diagramas y las ecuaciones para ver qué pasos se siguen para hallar la longitud de un salto.

Casilla B

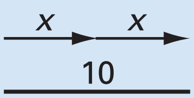
5. Explica la ecuación de la casilla B y describe cómo cambió el diagrama de la casilla A a la casilla B.



$$8 + 2x = 18$$

Casilla C

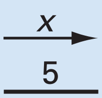
6. Explica la ecuación de la casilla C y describe cómo cambió el diagrama de la casilla B a la casilla C.



$$2x = 10$$

Casilla D

7. Explica la ecuación de la casilla D y describe cómo cambió el diagrama de la casilla C a la casilla D.



$$x = \frac{10}{2} = 5$$

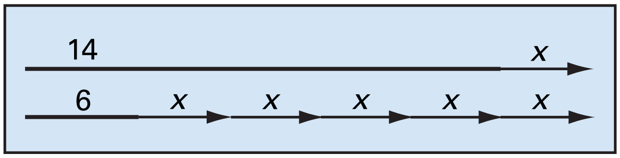
8. Escribe un "problema de ranas" y una expresión que represente cada diagrama de las partes **a** y **b**.

a.

b.

9. **a.** Escribe un "problema de ranas" y una ecuación que represente el diagrama de la siguiente casilla A.

Casilla A



b. Traza el diagrama del próximo paso para hallar el valor de x y escribe la ecuación para el diagrama.

c. Completa la secuencia de diagramas y ecuaciones.

10. Esta es una ecuación: $12 + 2x = 6 + 4x$.

a. Usa una secuencia de casillas para resolver la ecuación. Empieza por trazar un diagrama que represente cada miembro de la ecuación.

b. Traza el resto de las casillas y diagramas para resolver la ecuación.

11. **a.** Describe la ecuación $11 + 9x = 26 + 4x$ como un "problema de ranas".

b. Halla el valor de x de la ecuación y explica los pasos de tu solución. Como parte de tu explicación, puedes usar una serie de casillas, diagramas y ecuaciones.

12. Resuelve el valor de la incógnita de cada ecuación y explica tu método. ¿Cómo puedes estar seguro de que tus respuestas son correctas?

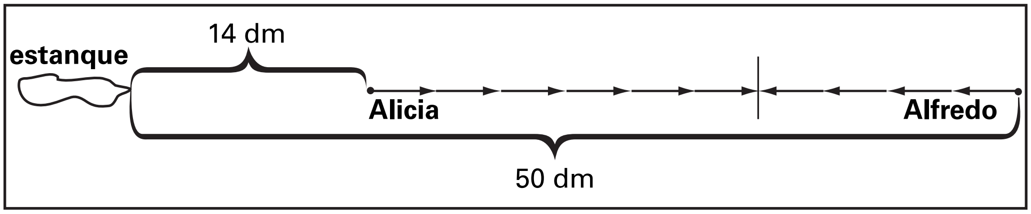
a. $100 + w + w = 75 + w + w + w + w$

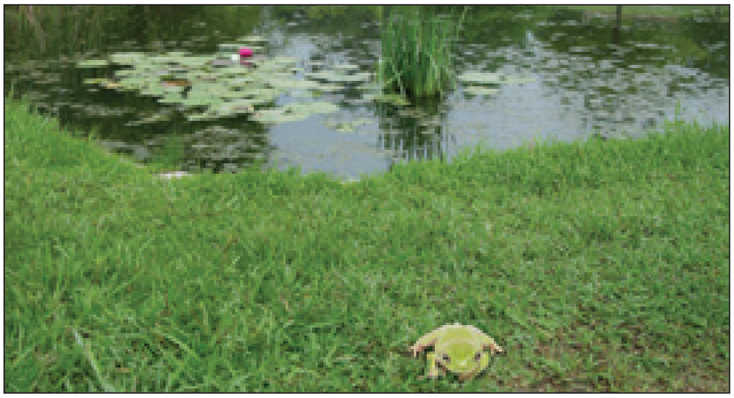
b. $y + 42 + y = 12 + 3y + 2y$

c. $144 + z = 120 + 9z$

Los opuestos se atraen

Un día, mientras exploraban su territorio, Alicia estaba a 14 dm del estanque y Alfredo estaba a 50 dm del estanque. Empezaron a saltar una hacia la otra. Como se muestra a continuación, se encontraron después de que Alfredo dio cuatro saltos hacia Alicia y de que Alicia dio seis saltos hacia Alfredo.

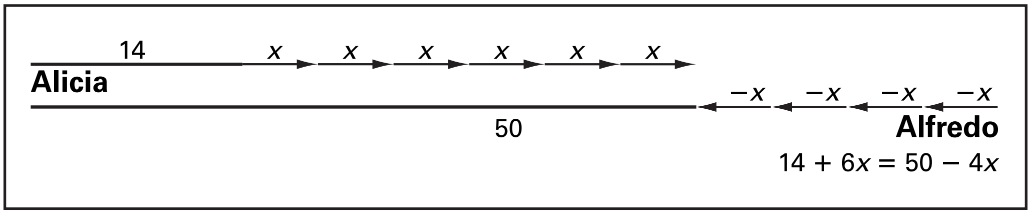




13. Supón que las dos ranas se trasladan la misma distancia x en cada salto.

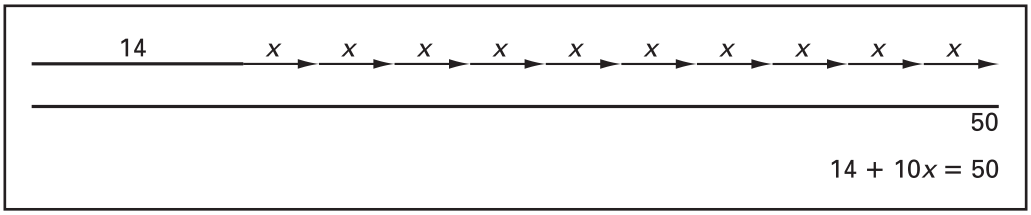
a. Explica cómo el diagrama y la ecuación de la casilla A representan la posición de las ranas.

Casilla A



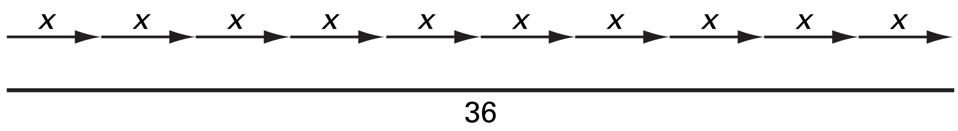
b. Explica la ecuación de la casilla B y describe cómo cambió el diagrama de la casilla A a la casilla B.

Casilla B



14. a. Explica la ecuación de la casilla C y describe cómo cambió el diagrama de la casilla B a la casilla C.

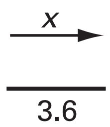
Casilla C



$10x = 36$

b. Explica la ecuación de la casilla D y describe cómo cambió el diagrama de la casilla C a la casilla D.

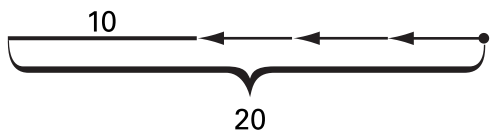
Casilla D



$x = \frac{36}{10} = 3.6$

15. Escribe un “problema de ranas” para representar la siguiente casilla A. Puedes hacer participar a Alfredo y Alicia, o puedes presentar nuevos personajes y situaciones. Asegúrate de resolver tu problema.

Casilla A



16. Traza un diagrama que represente la expresión $5 - 4x$.

17. a. Si empiezas con la ecuación $27 - 5w = 7 + 3w$, explica por qué $27 = 7 + 8w$.

b. Resuelve la ecuación.

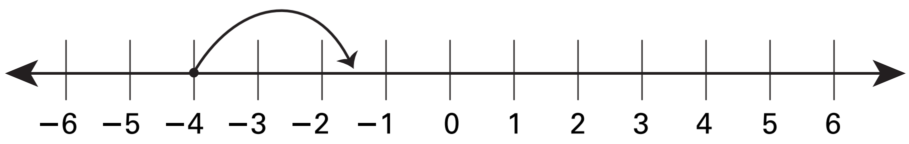
Rectas numéricas

Los problemas de ranas también pueden diagramarse sobre rectas numéricas.

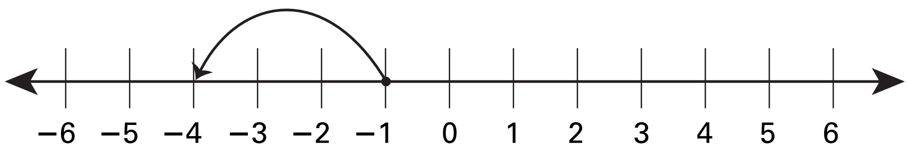

Una recta numérica tiene una dirección positiva y una negativa.

Los saltos sobre una recta numérica se consideran positivos si se realizan en dirección positiva y negativos si se realizan en dirección negativa.

Este es un ejemplo.



El punto de partida es −4; el salto es +2.5.



El punto de partida es −1; el salto es −3.

Alfredo parte del punto −3 y da 17 saltos en dirección positiva. Alicia parte del punto 2 y da 12 saltos en dirección positiva. Llegan al mismo punto. Supón que cada salto tiene la misma longitud y usa la letra *k* para esa longitud desconocida.

18. **a.** Escribe una ecuación para esta situación.

b. Halla el valor de *k*.

c. Usa una recta numérica para verificar tu solución.

19. La ecuación $8 + 12x = 3 + 2x$ representa un "problema de ranas" distinto.

a. Usa una recta numérica para explicar por qué los saltos deben ir en dirección negativa.

b. Resuelve la ecuación.

En esta sección, has resuelto ecuaciones usando diagramas y rectas numéricas. Otro método es realizar la misma operación (suma, resta, multiplicación o división) en cada miembro de una ecuación. Este es un ejemplo.

$15 + 8x = 37 - 3x$

Suma $3x$ a ambos miembros.

$15 + 11x = 37$

Resta 15 a ambos miembros.

$11x = 22$

Divide ambos miembros por 11.

$x = 2$

20. Analiza los pasos del ejemplo anterior. Usa pasos similares para resolver esta ecuación.

$-5 - 6x = 1 - 9x$

Suma $9x$ a ambos miembros.

______ = ______

Suma 5 a ambos miembros.

______ = ______

____

______ = ______

21. Estos son otros pasos para resolver la misma ecuación del problema 20. Completa la solución y verifica si el resultado es igual al del problema 20.

$-5 - 6x = 1 - 9x$

Suma $6x$ a ambos miembros.

______ = ______

Resta 1 a ambos miembros.

______ = ______

____

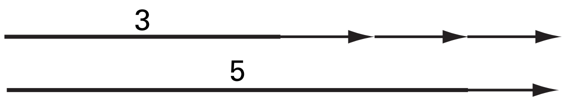
______ = ______

D Resolución de ecuaciones

Resumen

En esta sección, usaste problemas de ranas para escribir y resolver ecuaciones. Resolviste ecuaciones trazando diagramas, usando rectas numéricas y realizando una operación (suma, resta, multiplicación o división) en cada miembro de la ecuación.

Por ejemplo, la rana A está a 3 dm de un tronco y la rana B está a 5 dm del mismo tronco. La rana A y la B dan saltos de la misma longitud. La rana A da 3 saltos, la rana B da 1 salto y se encuentran en la misma posición, como se muestra en el siguiente diagrama.

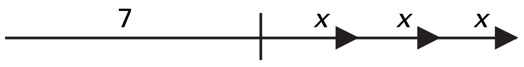


Para averiguar qué tan largos eran los saltos, resuelve la ecuación del problema.

$$\begin{aligned} 3 + 3x &= 5 + x \\ 3 + 2x &= 5 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Verifica tu trabajo

1. Escribe un "problema de ranas" y una expresión que represente este diagrama.



2. a. Traza un diagrama que represente esta ecuación: $2 + 3x = 10 + x$.

   b. Resuelve la ecuación cambiando el diagrama paso a paso.

3. Esta es una ecuación para un "problema de ranas" en el que ellas saltan en direcciones opuestas y se encuentran en un punto.

$$20 + 2v = 26 - 2v$$

   Resuelve la ecuación. Verifica tu respuesta usando una recta numérica.

4. Resuelve cada ecuación. Puedes usar cualquier método de esta sección.

   a. $12 + u = 11 + 3u$

   b. $-4 + 2w = 2 + w$

   c. $10 - v = 24 + v$

5. Escribe otros tres "problemas de ranas": uno que creas que es fácil, otro más difícil y otro que sea muy difícil. Describe cómo resolver cada problema.

Para reflexionar más

Piensa en tres métodos distintos para resolver una ecuación. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de cada método?

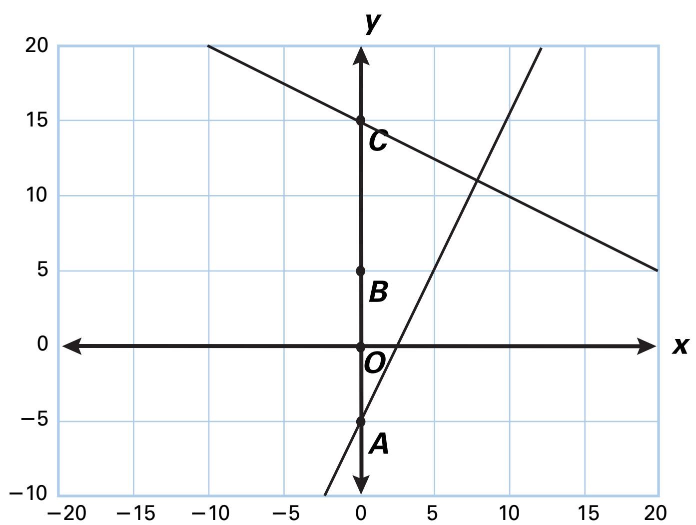
E Rectas que se intersecan

Encuentro de rectas

Volvamos a los guardabosques.

Los guardas de la torre *A* informan un incendio en la recta cuya ecuación es $y = -5 + 2x$.

Los guardas de *C* informan que hay un incendio en la recta $y = 15 - \frac{1}{2}x$.



Las dos rectas se visualizan en la pantalla de una computadora, como se muestra aquí.

1. **a.** Explica cómo puedes verificar que las dos rectas de la pantalla representan las dos ecuaciones.

   b. Usando la pantalla, estima las coordenadas del incendio.

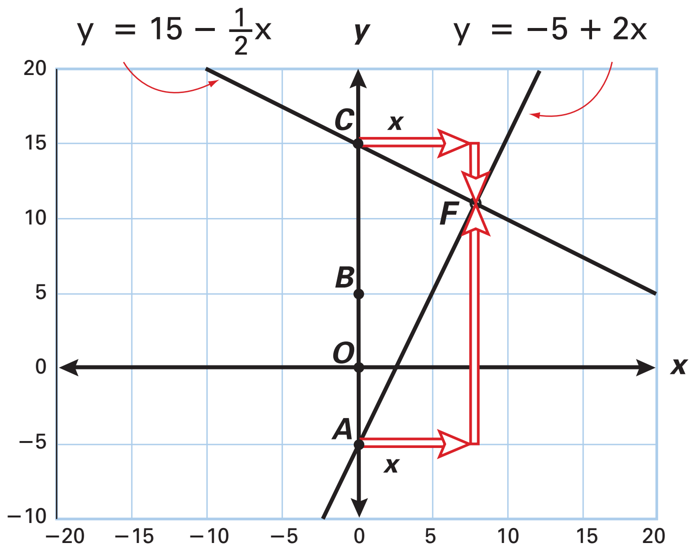
   c. ¿Cómo puedes comprobar tus coordenadas usando ambas ecuaciones?

¿Cuál es el punto?

Este es otro método para hallar las coordenadas del punto *F*, la intersección de las dos rectas.

Piensa en el cambio del punto *A* al punto *F* como un paso horizontal seguido por un paso vertical. Supón que la longitud del paso horizontal se representa con *x*.

2. **a.** Escribe una expresión para la longitud del paso vertical.



El cambio del punto *C* al punto *F* es el mismo paso horizontal *x* seguido por un paso vertical.

b. Escribe una expresión para la longitud de ese paso vertical.

Del diagrama anterior, puedes deducir la siguiente ecuación:

$$-5 + 2x = 15 - \frac{1}{2}x$$

3. **a.** Escribe un "problema de ranas" que se adapte a la ecuación.

b. Resuelve la ecuación usando uno de los métodos de la sección anterior.

c. ¿Cómo puedes usar tu respuesta de la parte **b** para hallar la coordenada *y* de *F*?

E Rectas que se intersecan

El supervisor del parque acaba de recibir dos mensajes:

Se informa que hay humo en la recta $y = 15 - x$.

Se informa que hay humo en la recta $y = 5 + 4x$.

4. **a.** ¿Qué torre envió cada mensaje?

b. Calcula las coordenadas del humo.

5. Repite el problema 4 para estos dos mensajes:

Se informa que hay humo en la recta $y = 5 + x$.

Se informa que hay humo en la recta $y = -5 + 1\frac{1}{4}x$.

El supervisor del parque recibió el mensaje $y = 15 + 2x$ de la torre C y el mensaje $y = 5 + 3x$ de la torre B.

6. ¿Qué mensaje esperas recibir de la torre A?

7. Inventa tu propio conjunto de mensajes y halla la ubicación que describen.

Usa la **Hoja de actividad del estudiante 6** para resolver los problemas 8 y 9.

8. **a.** En el sistema de coordenadas, traza la recta $y = 5$ y rotúlala l. Traza la recta $y = -3 + 2x$ y rotúlala m.

b. Halla el punto de intersección de las dos rectas en la gráfica y escribe las coordenadas.

c. Usa la ecuación de las rectas para verificar si las coordenadas que hallaste en **b** son correctas.

9. **a.** En el mismo sistema de coordenadas que usaste para el problema 8, traza la recta $y = 4 - 2x$ y rotúlala n.

b. Estima las coordenadas del punto de intersección de las rectas m y n.

c. Resuelve la ecuación $-3 + 2x = 4 - 2x$.

d. ¿Son iguales las respuestas que diste en **b** y **c**? Explica, sí o no, ¿por qué?

Supón que en la pantalla de la computadora de los guardabosques hay dos rectas: $y = 10 + 2x$ y $y = -8 + 2x$.

10. ¿Qué puedes decir acerca de estas rectas? ¿Tienen un punto de intersección?

11. Vuelve a la gráfica del problema 20, en la página 17.

a. Escribe una ecuación para cada recta de la gráfica.

b. Usa las ecuaciones para hallar las coordenadas del punto de intersección.

c. Compara la respuesta que hallaste en la parte **b** con la de la Sección B.

Historia de las matemáticas

Marjorie Lee Browne

A Marjorie Lee Browne le encantaban las matemáticas y llegó hasta los niveles más altos de estudio. Fue una de las primeras mujeres afroamericanas en obtener un doctorado en los Estados Unidos.

Nació el 9 de septiembre de 1914, en Menfis, Tennessee. Su padre, empleado postal del ferrocarril, era muy hábil para los cálculos mentales y le transmitió su amor por las matemáticas. Su madrastra era maestra de escuela.

Browne enseñó en la Universidad de Wiley, en Marshall, Texas, de 1942 a 1945. Se recibió de doctora en la Universidad de Michigan en 1949. Enseñó matemáticas en la Universidad Central de Carolina del Norte. Durante 25 años fue la única persona del departamento con título de doctora.

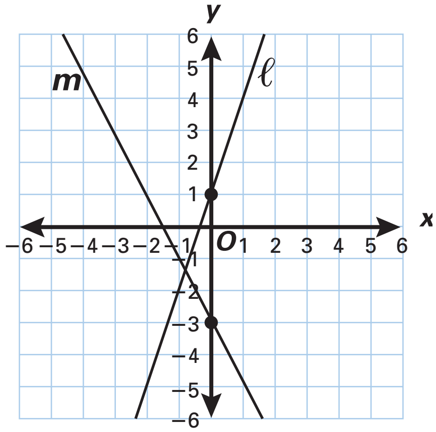
Usaba su propio dinero para ayudar a los estudiantes de matemáticas talentosos a que continuaran estudiando. Se la recordará por haber ayudado a los estudiantes a prepararse para el doctorado y a que lo completaran, y por animarlos a lograr lo que ella había logrado.

E Rectas que se intersecan

Resumen

La recta ℓ se puede expresar con la ecuación $y = 1 + 3x$, y la recta m con $y = -3 - 2x$.

Puedes intentar hallar el punto de intersección de las rectas *l* y *m* leyendo la gráfica. Este método te dará a menudo una estimación y no una respuesta exacta. Usa siempre ecuaciones para verificar el resultado de la lectura de la gráfica.



Puedes hallar el punto donde se intersecan estas dos rectas resolviendo la siguiente ecuación para x:
$-3 - 2x = 1 + 3x$

Esto te dará siempre un resultado exacto. Para resolver la ecuación, puedes usar cualquier método de la Sección D.

Verifica tu trabajo

1. ¿Cuál es el punto de intersección de la recta $y = 3$ y la recta $x = -1$? ¿Cómo resolviste este problema?

2. a. Traza un sistema de coordenadas como el de la **Hoja de actividad del estudiante 6** y traza la recta $y = -2 + 4x$.

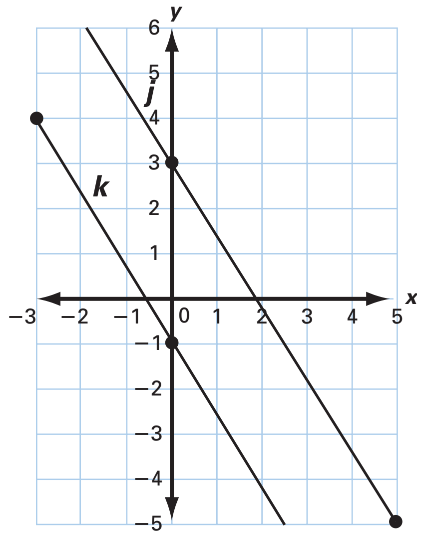
   b. Escribe una ecuación para una recta que no tenga punto de intersección con la recta de la parte **a.**

   c. Traza la recta $y = 4 + x$ en el mismo sistema de coordenadas y halla el punto de intersección de las dos rectas que trazaste. Explica cómo sabes que tu respuesta es correcta.

3. a. Halla el valor de x de la intersección de las rectas que se muestran en el Resumen resolviendo la ecuación $-3 - 2x = 1 + 3x$.

   b. Halla el valor de y del punto de intersección de las rectas m y ℓ que se muestran en esta gráfica.

4. Escribe una ecuación para cada una de las rectas que se muestran en la gráfica. Luego usa las ecuaciones para hallar la intersección de las dos rectas.



Para reflexionar más

Las gráficas y las ecuaciones pueden usarse para describir rectas y sus intersecciones. Di cuál te parece más fácil de usar y explica por qué.

Práctica adicional

Sección A Donde hay humo…

Este es un mapa de la zona de la bahía de San Francisco. En esta zona, hay siete aeropuertos. Desde la torre de control de cada aeropuerto pueden verse las torres de control de los otros aeropuertos.

Fuente: © Rand McNally.

Para responder a las siguientes preguntas, usa mediciones en grados, con 0° para el norte y mide en el sentido de las agujas del reloj.

1. **a.** ¿En qué dirección del aeropuerto de San Carlos está el aeropuerto de Hayward?

   b. Si miras desde Oakland en dirección 335°, puedes ver el aeropuerto de Alameda. ¿Qué hay en la dirección opuesta a 335°? ¿Qué aeropuerto está aproximadamente en esa dirección?

   c. Desde el aeropuerto de Hayward, puedes ver un rascacielos en dirección 300°. Este mismo rascacielos puede verse desde el aeropuerto de San Francisco en dirección 350°. Describe la ubicación de este rascacielos en el mapa.

Sobre el mapa de la zona de la bahía de San Francisco se ha trazado una cuadrícula. Los siete aeropuertos de esta zona están marcados con aviones. El aeropuerto de San Francisco tiene las coordenadas (0, 0).

Fuente: © Rand McNally.

2. a. ¿Cuáles son las coordenadas del aeropuerto de Oakland?

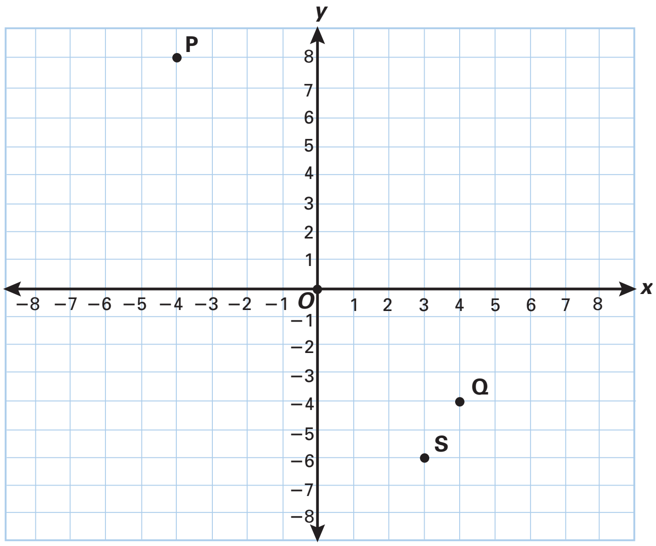
b. El puerto de Sausalito está en las coordenadas (–4, 9). ¿Cuál es la ecuación de la recta que se dirige al norte desde el puerto de Sausalito?

El puente de San Mateo cruza la bahía.

3. a. Usa papel cuadriculado para trazar la región rectangular que encierra por completo al puente de San Mateo. Usa las rectas horizontales y verticales de la cuadrícula.

b. Usa desigualdades para describir la región que trazaste en la parte **a**.

Sección B Direcciones en forma de pares de números



1. Describe el punto *P* de la gráfica como se ve desde el origen, usando un par de números de dirección.

2. ¿Podría el punto *Q* estar en una recta que pasa por *O* y *P*? Explica, sí o no, ¿por qué?

3. ¿Podría el punto *S* estar en una recta que pasa por *O* y *P*? Explica, sí o no, ¿por qué?

4. ¿Cuál es la pendiente de una recta que va desde el punto *Q* hasta el punto *P*?

Sección C La ecuación de una recta

1. **a.** En una hoja de papel cuadriculado, traza una recta con un intercepto *y* positivo y una pendiente negativa. Llama ℓ a esta recta.

   b. ¿Cuál es la ecuación de la recta ℓ?

   c. ¿Qué puedes decir acerca de cualquier recta que sea paralela a ℓ?

2. **a.** Traza una recta con un intercepto y negativo y una pendiente positiva. Llama *m* a esta recta.

   b. Ahora traza una recta que interseque a la recta *m*. ¿Cuál es la pendiente de esta recta y cuál es el intercepto? ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de estas dos rectas?

3. **a.** Traza una recta cuya ecuación sea $y = 2x - 4$.

   b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y que interseca la recta $y = 2x - 4$ en el punto (6, 8)?

Sección D Resolución de ecuaciones

1. Traza un diagrama para ilustrar cada una de las siguientes ecuaciones. Luego resuelve las ecuaciones.

   a. $12 + 2x = 5 + 4x$

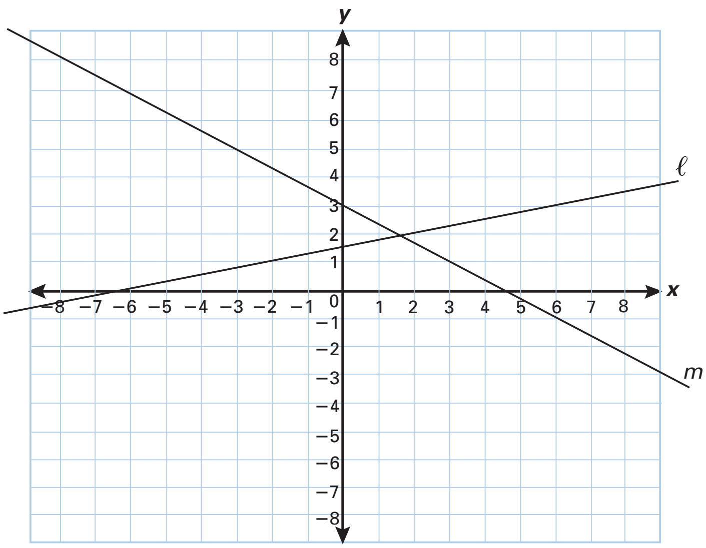
   b. $-5 + 3x = 16 - 4x$

2. Escribe un "problema de ranas" para cada una de las siguientes ecuaciones. Luego resuelve las ecuaciones.

   a. $4 + 3x = 19 + 2x$

   b. $-4 + 3x = -19 + 2x$

Sección E Rectas que se intersecan



1. ¿Cuál de las dos rectas de esta gráfica tiene la ecuación $y = 1.5 + 0.25\ x$? Explica tu respuesta.

2. ¿Cuál es la ecuación de la otra recta?

3. Halla el punto de intersección de las dos rectas.

4. Supón que trazas una recta p que interseca a la recta ℓ en (6, 3) y a la recta m en (3, 1). ¿Cuál es la ecuación de la recta p?

Respuestas para verificar tu trabajo

Sección A Donde hay humo…

1. **a.** 210°

   b. 310°, 130°

2. **a.** 5°, 10°

   b. Torre A: 18°
   Torre C: 135°

3. No, por lo menos un informe tiene que ser incorrecto, porque las rectas que van en la misma dirección son paralelas. Las rectas paralelas no se intersecan.

4. **a.** $y = 3$

   b. La desigualdad es $y < 3$.

5. Las siguientes rectas son los límites de la región.

   $y = -3$ y $y = 3$, de modo que, $-3 < y < 3$
   $x = -4$ y $x = 4$, de modo que, $-4 < x < 4$

Sección B Direcciones en forma de pares de números

1. **a.** P (4,3)

   b. La dirección desde *O* hasta *P* puede describirse con el par de dirección [+4, +3] y el par de dirección [+8, +6] o [+2, +1.5], u otros pares que tengan la misma razón que $\frac{+3}{+4}$.

   c. Pueden rotularse distintos puntos, por ejemplo, (−4, −2), (−2, −1) y (−6, −3). Nota que todos los puntos deben estar en una línea recta que va desde *O* y pasa por (−4, −2).

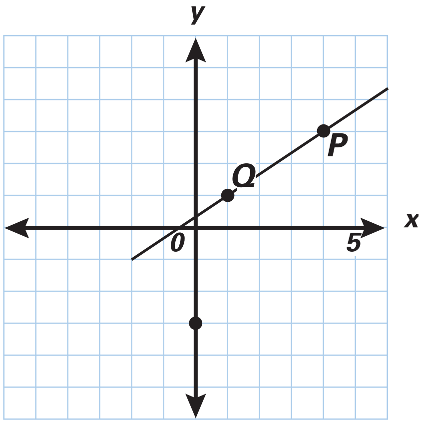
   d. Puedes trazar una recta que pasa por O en la dirección [−4, −2] o la misma recta que pasa por *O* y (−4, −2).

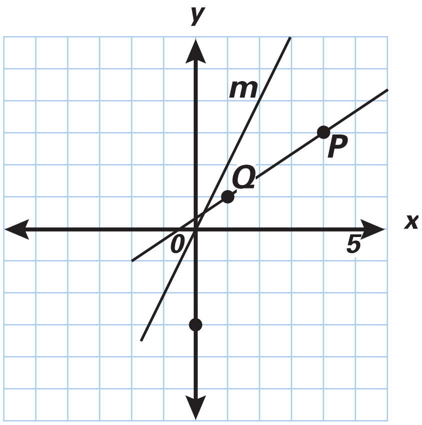
2. **a.** Distinta dirección. El primer par se mueve a la derecha y arriba, y el segundo par se mueve a la derecha y abajo.

   b. La misma dirección. Ambos van a la derecha y arriba.

   c. La misma dirección. Ambos se dirigen al este.

   d. La misma dirección. Ambos van a la derecha y arriba.





3. a. Observa la gráfica superior de la izquierda.

   b. La dirección desde *P* hasta *Q* puede describirse con el par de dirección [−3, −2].

   c. La pendiente puede hallarse usando el par de dirección de la parte **b**. Así, la pendiente es $\frac{-2}{-3}$, que puede simplificarse a $\frac{2}{3}$.

4. Observa la gráfica inferior de la izquierda.

5. a. Hay sólo una recta que pasa por estos dos puntos.

   b. Para hallar la pendiente, primero debes hallar la dirección desde un punto hasta el otro. Desde (1, 2) hasta (26, 52), te trasladas 25 pasos en dirección horizontal y 50 pasos en dirección vertical. Por lo tanto, el par de dirección es [+25, +50]. La pendiente es $\frac{+50}{+25} = 2$. Puede ser útil hacer un esquema de la situación.

Sección C La ecuación de una recta

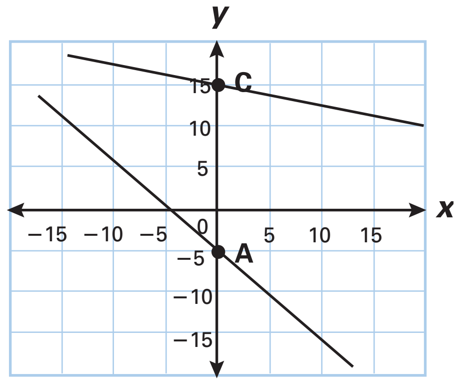
1. a. El intercepto *y* es −3 y la pendiente es 2.

   b. Si una recta pasa por (0, 0), el intercepto *y* es 0. De modo que la ecuación es $y = 0 + 2x$ o, incluso, más corta: $y = 2x$.

2. a. $y = 15 - \frac{1}{4}x$ o $y = 15 + (-\frac{1}{4})x$

   b. $y = -5 - 1x$
   o $y = -5 - x$

3.



Puedes haber usado distintas escalas en los ejes. De ser así, tus rectas parecerán distintas.

4. **a.** Son posibles muchas respuestas; un ejemplo es $y = 2 - 3x$. Cuando trazas una recta con un intercepto y positivo y una pendiente negativa, la recta siempre cruza el eje de y por encima del origen y desde allí se dirigirá hacia abajo y hacia la derecha.

b. Una recta con intercepto y 0 pasa por O (0, 0).

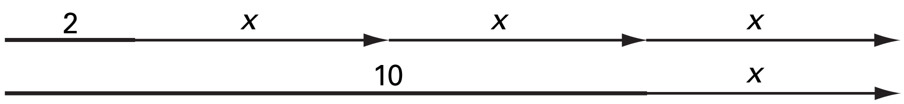
c. Una recta con pendiente 0 es una recta horizontal, dado que la dirección vertical de la razón de la pendiente debe ser 0.

Sección D Resolución de ecuaciones

1. Las respuestas pueden variar. Ejemplo de respuesta:

Una rana parte de un punto a 7 dm del sendero y da tres saltos de la misma longitud. La expresión que representa el diagrama es $7 + 3x$.

2. **a.**



b.

$$2 + 3x = 10 + x$$

$-x$

$$2 + 2x = 10$$

-2

$$2x = 8$$

Divide por 2.

$$x = 4$$

3. Puedes usar distintos métodos para resolver la ecuación, como trazar diagramas con ranas, usar una recta numérica o realizar operaciones en ambos miembros. Este es un ejemplo de solución en el que se usa el método de realizar operaciones:

$20 + 2v = 26 - 2v$

suma $2v$ a ambos miembros

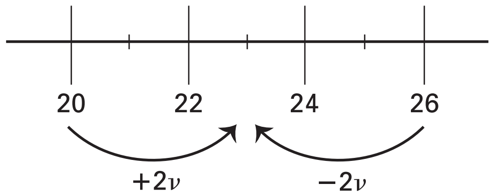
$20 + 4v = 26$

resta 20 a ambos miembros

$4v = 6$

divide ambos miembros por 4

$v = 6/4 = 1.5$



4. a. $12 + u = 11 + 3u$
$12 = 11 + 2u$
$1 = 2u$
$u = 1 \div 2$
$0.5 = u$

b. $-4 + 2w = 2 + w$
$2w = 6 + w$
$w = 6$

c. $10 - v = 24 + v$
$10 = 24 + 2v$
$-14 = 2v$
$-14 \div 2 = v$
$-7 = v$

5. Los problemas variarán. Ejemplos de problemas:

Fácil:

$4 + 3x = 7 + 2x$
Las dos ranas saltan en la misma dirección.

$4 + x = 7$
$x = 3$

Algo difícil:

$4 + 3x = 19 - 2x$
Una rana salta en una dirección positiva y la otra rana salta en una dirección negativa.

$4 + 5x = 19$
$5x = 15$
$x = 3$

Difícil:

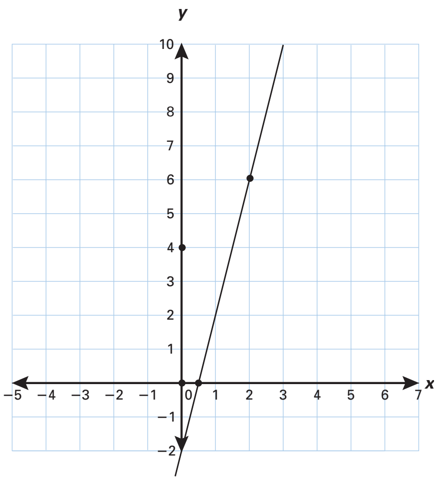
$-4 - 3x = -19 + 2x$
Una rana salta en una dirección positiva y la otra rana salta en una dirección negativa, a la izquierda del 0.

$-4 = -19 + 5x$
$15 = 5x$
$3 = x$

Sección E Rectas que se intersecan

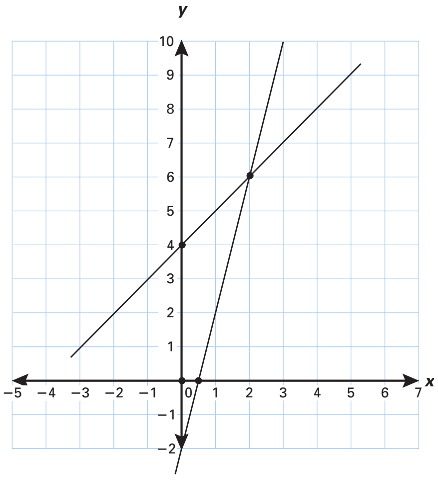
1. El punto de intersección es $(-1, 3)$. Esto se puede ver sin necesidad de un dibujo porque la coordenada *x* debe ser igual a -1 y la coordenada *y* debe ser igual a 3.

2. **a.**



b. Cualquier recta que tenga la misma pendiente, pero intercepto *y* distinto no tiene punto de intersección con la recta dada, de modo que la ecuación es $y =$ *cualquier número* $+ 4x$.

c. El punto de intersección es (2, 6).



3. a. En el punto de intersección, $x = -\frac{4}{5}$.

$-3 - 2x = 1 + 3x$

$-3 = 1 + 5x$

$-4 = 5x$

$x = -\frac{4}{5}$

b. En el punto de intersección, $x = -\frac{7}{5}$.

$y = 1 + 3\left(-\frac{4}{5}\right)$

$y = \frac{5}{5} + -\frac{12}{5} = -\frac{7}{5}$

4. La recta *j* pasa por los puntos (0, 3) y (5, -5), de modo que la pendiente es $\frac{-8}{5}$. La recta *k* pasa por los puntos (-3,4) y (0,-1), de modo que la pendiente es $\frac{-5}{3}$. La ecuación de la recta *j* es $y = 3 - \frac{8}{5}x$.

La ecuación de la recta *k* es $y = -1 - \frac{5}{3}x$.

El punto de intersección es (–60, 99). Ejemplo de estrategia:

$3 - \frac{8}{5}x = -1 - \frac{5}{3}x$	suma $\frac{8}{5}x$ a ambos miembros
$3 = -1 + (\frac{8}{5} - \frac{5}{3})x$	suma 1 a ambos miembros
$4 = -\frac{1}{15}x$	multiplica ambos miembros por -15
$x = -60$	
$y = 3 - \frac{8}{5}(-60)$	
$y = 3 - (-96) = 99$	